ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1916.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica vegetale. — *Sulla formazione dei glucosidi per mezzo delle piante.* Nota II del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

Colle esperienze descritte nelle nostre precedenti Memorie [1] abbiamo sempre studiato il contegno dei composti organici nelle piante adulte alle quali le sostanze venivano o inoculate allo stato solido nel fusto o fatte assorbire per la via delle radici. Con entrambi i sistemi abbiamo avuto, in alcuni casi, degli indizî; in altri si potè dare la prova che, facendo assorbire alle piante certe sostanze aromatiche, si formano, nell'interno delle piante stesse, i relativi glucosidi.

Ci è sembrato ora interessante di studiare se un simile risultato si fosse ottenuto anche sui semi germinanti. A tal fine abbiamo prescelto i semi di mais, frumento, fagiuoli, lupino, veccia; le sostanze sperimentate furono: la saligenina, l'alcool benzilico, l'idrochinone, la pirocatechina, l'acido gallico ed il tannino. Queste ultime tre sostanze si dimostrarono tossiche, e non ci diedero perciò risultati degni di menzione.

Saligenina. — Questa sostanza, che ci aveva dato colle piante adulte i migliori risultati, venne presa, per le esperienze sulle piantine germinanti, in speciale considerazione. Le prove vennero eseguite col lupino, la veccia, il

(1) Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, serie 6ª, tomo V, pag. 29 (1907-08); serie 6ª, tomo VI, pag. 109 (1908-09); serie 6ª, tomo VII, pag. 143 (1909-10); serie 6ª, tomo VIII, pag. 47 (1910-11); serie 6ª, tomo IX, pag. 71 (1911-12); serie 6ª, tomo X, pag. 143 (1912-13); serie 7ª, tomo I. pag. 339 (1913-14). — Vedansi anche questi Rendiconti: XVIII, *1*, 419 (1909); XVIII, *2*, 594 (1909); XX, *1*, 392 (1911); XX, *1*, 614 (1911).

mais ed i fagiuoli. La saligenina si dimostrò peraltro velenosa per il lupino e la veccia; soltanto le esperienze sulle altre due piante poterono avere buon esito.

Esperienze sul mais. — Si pose a germinare alla luce, sopra carta da filtro bagnata con acqua, 1 kg. di semi di mais. L'esperienza venne iniziata il 26 aprile. Quando le piantine avevano raggiunto un certo sviluppo, cioè il 7 maggio, si cominciò a bagnare sistematicamente la carta con soluzione di saligenina all'1 per mille sino al 30 maggio, giorno in cui, a germinazione quasi ultimata, le piantine vennero prelevate. La quantità di soluzione fornita complessivamente fu di 5 litri, vale a dire 5 gr. di saligenina. Il peso complessivo delle piantine era di gr. 2800.

Per vedere se dalla saligenina avesse preso origine la salicina, analogamente a quanto avevamo dimostrato per il mais adulto, abbiamo preparato, innanzi tutto, colle piantine, un estratto acquoso. A tale fine le piantine, lavate con acqua, vennero immerse, senza triturarle, poche alla volta per qualche minuto nell'acqua in ebollizione, allo scopo di distruggere gli enzimi che potevano eventualmente determinare la scissione del glucoside. Le piante furono quindi ridotte a poltiglia ed estratte con acqua, poi spremute al torchio; il liquido acquoso ottenuto fu riunito all'acqua in cui era avvenuta la scottatura, e il tutto venne concentrato a piccolo volume. Il liquido risultante venne estratto ripetutamente con etere, allo scopo di spogliarlo della saligenina libera eventualmente esistente. L'estratto etereo si rese alcalino con carbonato sodico, e fu estratto di nuovo con etere. Per evaporazione del solvente, si ottenne un residuo cristallino misto ad una sostanza oleosa, del peso di 1 decigrammo. Dava la reazione della saligenina col cloruro ferrico: ma, in causa della piccola quantità e delle impurezze che l'accompagnavano, non si potè ricristallizzare per fissarne il punto di fusione. Il liquido alcalino residuo dell'estrazione eterea venne acidificato con acido solforico ed estratto di nuovo con etere per vedere se una parte della saligenina fosse stata ossidata ad acido salicilico. L'estratto, in piccolissima quantità, diede però, col cloruro ferrico, una colorazione incerta.

Allo scopo di vedere se nel liquido primitivo, dal quale venne estratta la saligenina libera, si trovasse un glucoside simile alla salicina, fu riscaldato all'ebollizione fino ad eliminare l'etere e vi si aggiunse, dopo raffreddamento, un poco di emulsina. Dopo 24 ore di riposo il liquido venne estratto con etere; l'estratto etereo, sciolto in acqua, fu reso alcalino con carbonato sodico, e nuovamente estratto con etere. Per evaporazione del solvente si ottenne un residuo cristallino che, seccato nel vuoto, pesava gr. 0,2. Dava la reazione della saligenina e, ricristallizzato dal benzolo, fondeva a 86°, che è il punto di fusione dato dagli autori per la saligenina.

Dalle esperienze col mais risulta dunque che, facendo assorbire la saligenina, per la via delle radici, alle piante germinanti, si forma la salicina,

analogamente a quanto abbiamo osservato inoculando la stessa sostanza nel fusto delle piante adulte.

Esperienze sui fagiuoli. — Si pose a germinare alla luce, il 18 giugno, su carta da filtro bagnata, mezzo kg. di fagioli. Il 22 giugno, a germinazione iniziata, si cominciò a bagnare sistematicamente con soluzione di saligenina all'1 per mille. Le piantine vennero prelevate il 5 luglio, dopo aver loro somministrato, complessivamente, 10 litri di soluzione. Il peso totale delle piantine era di gr. 1450. Con esse venne preparato un estratto acquoso, ponendole prima, senza triturarle, nell'acqua in ebollizione. Procedendo quindi col metodo precedentemente descritto, si ottenne una piccolissima quantità di saligenina libera, riconosciuta dalla reazione col cloruro ferrico, ma che non potè venire ricristallizzata. Per trattamento con emulsina si ottennero gr. 0,2 di residuo cristallino che, purificato dal benzolo, fondeva a 86° ed era quindi costituito da saligenina proveniente da un glucoside. Tanto dall'estratto diretto, come da quello ottenuto dopo il trattamento coll'emulsina, si ebbe la reazione dell'acido salicilico.

Era interessante di vedere se la formazione del glucoside avvenisse anche sui semi germinanti al buio. A tal fine venne posto a germinare, il 4 luglio, mezzo kg. di fagioli. La quantità totale di saligenina somministrata dal 9 luglio (giorno in cui si cominciò l'inaffiamento) al 25 luglio (giorno della raccolta) fu di gr. 8. Le piantine pesavano gr. 2325. Il risultato ottenuto fu analogo al precedente; si ottenne cioè una piccolissima quantità di saligenina libera ed una quantità, più rilevante (gr. 0,2), di saligenina combinata allo stato di glucoside. Anche in questo caso si ebbe la reazione dell'acido salicilico, tanto nell'estratto diretto, quanto dopo l'aggiunta di emulsina.

Queste prove dimostrano che la saligenina si trovava nelle piantine germinanti, per la maggior parte allo stato di glucoside. Non si può anzi escludere che tutta la saligenina fosse contenuta in tale stato, poichè è verosimile che la piccola quantità trovata libera fosse dovuta a traccie della sostanza rimaste aderenti alle radici.

Alcool benzilico. — Con questa sostanza si sperimentarono i fagiuoli; mezzo kg. di semi si posero a germinare il 25 maggio su carta da filtro bagnata. Dopo una settimana, si cominciò ad innaffiare con alcool benzilico all'1 per mille. Il trattamento durò dal 2 al 22 giugno, fornendo complessivamente gr. 12 di sostanza. Il peso delle piantine, al momento della raccolta, era di gr. 1900. Le piantine, dopo lavate e immerse per qualche minuto nell'acqua bollente, vennero estratte con acqua; l'estratto acquoso si concentrò nel vuoto a piccolo volume, e si estrasse ripetutamente con etere. Per evaporazione del solvente, si ottenne un residuo oleoso che venne trattato con acqua alcalina per carbonato sodico e nuovamente estratto con etere. Per identificare nell'estratto l'alcool benzilico, abbiamo tentato di trasformarlo in acido benzoico ossidando colla miscela di Bekmann, seguendo il

procedimento altrove descritto (1). Si ottenne una piccolissima quantità di prodotto, dal quale non si potè avere alcun indizio della presenza di acido benzoico. Ciò del resto era prevedibile, poichè l'alcool benzilico eventualmente rimasto libero sarà stato trascinato col vapore nella distillazione.

Per vedere se nelle piante si fosse formato dall'alcool benzilico un corpo di natura glucosidica, si fece bollire a ricadere per mezz'ora, con acido cloridrico diluito, il liquido residuo dell'estrazione eterea primitiva. Dopo raffreddamento, si estrasse con etere; e l'estratto venne trattato con acqua, reso alcalino con carbonato sodico ed esaurito di nuovo con etere. L'estratto etereo oleoso venne bollito per mezz'ora colla miscela di Bekmann, ed il prodotto si estrasse con etere. Per evaporazione del solvente, si ebbe un piccolissimo residuo oleoso che, seccato nel vuoto, solidificò in cristalli bianchi. Abbiamo tentato di ricristallizzarli dall'acqua; ma si ottenne una così piccola quantità di prodotto da non poterne determinare il punto di fusione. Abbiamo perciò cercato di identificarlo mediante il trattamento con carbonato sodico diluitissimo e cloruro ferrico. Si ottenne un precipitato carnicino che ci indicò la presenza di acido benzoico.

Da questa esperienza è perciò risultato che nei semi germinanti, trattati coll'alcool benzilico, si è formata una traccia di un composto che dà alcool benzilico per ebollizione con acido cloridrico. Ciò analogamente a quanto fu da noi altra volta riscontrato per inoculazione dell'alcool benzilico nel mais, e innaffiamento dei fagiuoli adulti colla stessa sostanza.

Idrochinone. — L'idrochinone si dimostrò tossico per i semi di mais; ci diede invece buoni risultati coi fagiuoli, sui quali venne eseguita l'esperienza. A tal fine, nel 25 maggio si pose a germinare alla luce, mezzo kg. di semi, e, dopo una settimana, si cominciò a innaffiare sistematicamente colla soluzione di idrochinone all'1 per mille. Le piantine vennero raccolte il 18 giugno e pesavano gr. 2200. La quantità totale di idrochinone somministrata fu di gr. 12.

Le piantine, dopo lavate ed immerse per qualche minuto nell'acqua bollente, vennero estratte con acqua, ed il liquido acquoso venne concentrato nel vuoto a piccolo volume. Il residuo si estrasse con etere; l'estratto etereo sciropposo fu reso alcalino con carbonato sodico, ed il liquido venne estratto nuovamente con etere. Per evaporazione del solvente si ottenne un residuo del peso di un decigrammo, costituito da un miscuglio di cristalli bianchi e neri, probabilmente idrochinone e chinidrone. Per cristallizzazione da molto benzolo si ottennero i soli cristalli bianchi fondenti a 169° (idrochinone).

Per vedere se, come nei casi precedenti, si fosse anche qui formato un composto di natura glucosidica, al liquido residuo dell'estrazione primitiva si

(1) Questi Rendiconti, XX, *1*, 392 (1911). — Memorie della R. Accademia delle scienze di Bologna, serie 6ª, tomo V, pag. 29 (1907-08).

aggiunse un poco di acido solforico diluito. Dopo mezz'ora di ebollizione abbiamo nuovamente esaurito con etere il prodotto. Per evaporazione del solvente, rimase una piccola quantità di cristalli che, ricristallizzati dal benzolo, fondevano a 169°. Erano quindi costituiti da idrochinone.

Questa esperienza ha dimostrato che dall'idrochinone si è formato nelle piante un composto di natura glucosidica, probabilmente l'arbutina. Ad un simile risultato non potemmo mai giungere nelle nostre precedenti esperienze di inoculazione nel mais, poichè l'idrochinone si era dimostrato velenoso per questa pianta.

Anche con piante germinanti, che devono vivere a spese delle riserve, avviene dunque la formazione dei glucosidi, così come introdudendo le sostanze nelle piante adulte, sia per mezzo dell'inoculazione, sia per l'assorbimento delle radici.

Mentre che per sperimentare su forti quantità di sostanze è opportuno di seguire il metodo dell'inoculazione, per esperienze in cui non siano richieste grandi quantità si raccomanda il sistema dei semi germinanti perchè il materiale da esaminare è meno ingombrante, mancando le parti legnose.

Operando colle piante germinanti, si rende più facile lo studio dei fenomeni in assenza della luce: ed è così che si è potuta osservare la formazione della salicina al buio, dimostrando che nella genesi dei glucosidi la luce non è necessaria. Il fatto, poi, che la salicina si sia prodotta nelle piante che non potevano assimilare, non è conforme alla supposizione di alcuni autori, secondo i quali i glucosidi sarebbero materiali di riserva perchè si formano in piante che, crescendo al buio, non possono contenere quantità eccedenti di glucosio. Ma con questo non è detto che le sostanze aromatiche, che si ricontrano libere o come glucosidi nelle piante, siano da considerarsi soltanto come materie di rifiuto, come vorrebbe segnatamente A. Pictet. Secondo noi, appare più probabile che le sostanze che sembrano accessorie abbiano la loro funzione, sebbene questa rimanga, nella maggior parte dei casi, sconosciuta. Anzi, su questo importante argomento intendiamo di ritornare quando ci sarà possibile di eseguire appropriate esperienze.

Zoologia. — *Intorno a protozoi parassiti dei termiti.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Approssimazioni numeriche.* Nota del Corrispondente G. Peano.

Le quantità, o numeri reali, su cui si opera in pratica, sono in generale date solo per approssimazione. Quindi è necessario, conoscendo il grado di approssimazione nei dati, di saper determinare l'approssimazione che risulta in un calcolo su quei dati.

Il calcolo differenziale fornisce una regola semplice per risolvere il problema, colle formule del differenziale totale, del tipo

$$\mathrm{d}f(x\,,y) = \mathrm{D}_1 f(x\,,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{D}_2 f(x\,,y)\,\mathrm{d}y\,,$$

ove $f(x\,,y)$ è una funzione delle due variabili x e y, $\mathrm{D}_1 f$ e $\mathrm{D}_2 f$ sono le sue derivate parziali, $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ sono le differenze fra i valori veri ed i valori approssimati di x e y, e $\mathrm{d}f(x\,,y)$ è la differenza corrispondente fra i valori della funzione.

Questa regola del differenziale totale fu usata in tutti i tempi, e lo è sempre nelle matematiche applicate, per risolvere il problema delle approssimazioni. Però, se per x e y in $\mathrm{D}_1 f(x\,,y)$ e $\mathrm{D}_2 f(x\,,x)$ si intendono i valori veri, o i valori dati per approssimazione, di quelle due quantità, la formula non è esatta, ma deve essere completata con infinitesimi d'ordine superiore. Essa si usa però nelle applicazioni pratiche, poichè, come dice il Serret, « l'inexactitude ne peut avoir aucune influence dans les applications que l'on en fait ».

Guyou, nei « Nouvelles Annales de mathématiques » 1889, attribuì nella formula considerata, ad x e y, dei valori medii fra i veri e gli approssimati, e la formula diventa esatta. La formula, così intesa, non è altro che il teorema del valore medio, fondamento del calcolo differenziale, stato enunciato da Cavalieri nel 1635, per le funzioni d'una variabile.

Questa applicazione trovasi pure nelle mie *Lezioni di analisi infinitesimale*, Torino 1893, tomo 2°, pp. 146-149. Non veggo però negli altri trattati di Analisi alcun cenno di questa semplice ed elegante applicazione delle regole di derivazione alla teoria delle approssimazioni, di tanta importanza pratica.

Nella presente Nota espongo le regole per le approssimazioni numeriche, sotto forma elementare, senza presupporre il calcolo differenziale; dò a queste regole la forma di regole di derivazione, il che facilita la memoria.

Notazioni.

Dare un numero per approssimazione significa dare un intervallo cui quel numero appartiene. Se a e b sono i valori approssimati, per difetto e per eccesso, di una quantità, questa apparterrà all'intervallo da a a b. Questo intervallo si suol indicare con $a\,\overline{\ }\,b$, $a\,|\overline{\ }\,b$, $a\,\overline{\ }|\,b$, $a\,|\overline{\ }|\,b$, secondochè sono esclusi gli estremi, o sono compresi, o uno è compreso e l'altro è escluso.

Preferisco la notazione inglese 1·23 e ·45 alla 1,23 e 0,45 delle frazioni decimali; poichè la virgola ha troppi significati.

Colla notazione 1·234 ... , e simili, si suole intendere ogni numero le cui prime cifre sono quelle scritte, cioè

$$1{\cdot}234\ldots = 1{\cdot}234\,|\overline{\ }\,1{\cdot}235\,;$$

« la scrittura 1·234 ... rappresenta l'intervallo compreso fra 1·234 e 1·235 (il primo incluso, ed il secondo escluso) ».

Si avrà:

$$1{\cdot}234 \;\varepsilon\; 1{\cdot}234\ldots\,,$$

cioè « 1·234 è un numero della classe 1·234 ... ».

$$1{\cdot}234\ldots \supset 1{\cdot}23\ldots\,;$$

« il primo intervallo è contenuto nel secondo ».

In questo mio scritto, io distinguerò il segno ε di proposizione singolare, e il segno $\supset$ di proposizione universale, dal segno $=$. Molti autori li confondono col segno $=$. Non intendo qui di esaminare se ciò sia comodo o no; non introducendo i segni ε e $\supset$, bisognerà sempre far notare che dalle scritture

$$1{\cdot}234 = 1{\cdot}234\ldots \quad , \quad 1{\cdot}2345 = 1{\cdot}234\ldots\,,$$

ove il segno $=$ ha il valore di ε, e dalle scritture

$$1{\cdot}234\ldots \supset 1{\cdot}23\ldots \quad , \quad 1{\cdot}235\ldots \supset 1{\cdot}23\ldots\,,$$

ove $=$ significa $\supset$, non si può dedurre l'eguaglianza dei primi membri.

Regole.

Siano x , y , ... delle coppie di quantità. Dicendo che x è una coppia di quantità, intendiamo che x_1 e x_2 sono delle quantità. Porremo:

$$\mathrm{d}x = x_2 - x_1\,;$$

$\mathrm{d}x$ si può leggere « incremento di x », o « differenza di x », o anche

« differenziale di x ». Essendo $f(x, y)$ una espressione analitica delle coppie x e y, porremo

$$\mathrm{d}f(x, y) = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

Il simbolo d ebbe questo valore, e l'ha ancora in libri di matematica applicata. Nei trattati di analisi fu sostituito, in questo senso, con Δ

Si ha:

(I) $$\mathrm{d}(x + y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$$

Infatti

$$\mathrm{d}(x + y) = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$$

Se x_1, x_2 e y_1, y_2 sono i valori, per difetto e per eccesso, delle quantità approssimate x e y, saranno $x_1 + y_1$ e $x_2 + y_2$ i valori approssimati, per difetto e per eccesso, della somma; e $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}(x + y)$ sono gli errori negli addendi e nella somma. Quindi la formula (I) si può leggere « l'errore della somma è eguale alla somma degli errori degli addendi ».

Esempio:

$$\mathrm{d}(1{\cdot}23 \ldots + 4{\cdot}56 \ldots) = \mathrm{d}\,1{\cdot}23 \ldots + \mathrm{d}\,4{\cdot}56 \ldots = {\cdot}01 + {\cdot}01 = {\cdot}02:$$

cioè, se gli addendi sono noti a meno di 1 centesimo, la somma sarà nota a meno di 2 centesimi.

Se un addendo è esatto, il suo errore sarà nullo. Per esempio,

$$\mathrm{d}(\pi + 6{\cdot}85 \ldots) = \mathrm{d}\,6{\cdot}85 \ldots = {\cdot}01,$$

supposto π un numero esatto. Se $\pi = 3{\cdot}14$, cioè è un numero esatto di centesimi, sarà $\pi + 6{\cdot}85 \ldots = 9{\cdot}99 \ldots$, e la somma sarà nota con 2 cifre decimali esatte. Ma se π ha 4 cifre decimali, per esempio $\pi = 3{\cdot}1415$, la somma sarà per difetto 9·9915, e per eccesso 10·0015. Quindi, quantunque l'errore della somma sia di un centesimo, noi possiamo assicurare nessuna cifra di questa somma. Pertanto non esiste soluzione del problema « determinare il numero delle cifre decimali esatte con cui si debbono dare i termini d'una somma, affinchè questa risulti nota con n cifre decimali esatte ». La pratica si contenta di regole come le seguenti:

« Date due quantità note con n cifre decimali, si sommino i valori per difetto; tutte le cifre sono cifre esatte della somma, salvo l'ultima cifra che forse si deve aumentare di una unità ».

Questa regola non varia, anche se un addendo è esatto, purchè abbia più di n cifre decimali. Se l'ultima cifra è 9, aumentandola di un'unità varia la precedente.

« Date più quantità, in numero non superiore a 11, note con n cifre decimali, si sommino i valori per difetto, e si sopprima l'ultima cifra. Tutte

le $n-1$ cifre rimaste sono le cifre esatte della somma, salvo l'ultima, che forse si deve aumentare di una unità ».

Essendo a una quantità qualunque, ed n un numero intero (positivo di regola), pongasi:

$$V_n a = (E\,10^n a)/10^n ,$$

cioè $V_n a$, che si legge « valore con n decimali di a », indica ciò che si ottiene moltiplicando a per 10^n, prendendo la parte intera del prodotto, e dividendola per 10^n.

Allora, se m è un intero non superiore ad 11, e se $a_1\, a_2 \ldots a_m$ sono quantità qualunque, la regola precedente si può scrivere:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m \varepsilon\, V_{n-1}(V_n a_1 + V_n a_2 + \cdots + V_n a_m) + (0^{\vdash\!\dashv}2)/10^{n-1} .$$

Questa regola è data, nei trattati, per 9 o 10 termini. Il prof. M. Bottasso, in una conferenza tenuta lo scorso anno 1915 alla R. Università di Torino, osservò che sussiste pure per 11 termini.

(II) $$d(x - y) = dx - dy .$$

Dimostrazione analoga alla (I). Se $x_1 x_2 y_1 y_2$ sono i valori per difetto e per eccesso di x e y, i valori per difetto e eccesso della somma sono $x_1 - y_2$ e $x_2 - y_1$, cioè

$$x_1^{\vdash\!\dashv} x_2 - y_1^{\vdash\!\dashv} y_2 = (x_1 - y_2)^{\vdash\!\dashv}(x_2 - y_1) .$$

(III) $$d(x \times y) = x \times dy + y \times dx ,$$

ove x e y rappresentano valori medii fra x_1 e x_2, y_1 e y_2.

Infatti:

$$d(x \times y) = x_2 y_2 - x_1 y_1 = x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_1 =$$
$$= x_2(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = x_2\, dy + y_1\, dx ,$$

che è appunto la formula richiesta, ove la parola *medio* non escluda l'estremo, cioè si parli degli intervalli $x_1^{\vdash\!\dashv} x_2$, $y_1^{\vdash\!\dashv} y_2$, estremi inclusi.

Oppure, continuando la serie delle nostre eguaglianze, detta z una quantità compresa fra 0 e 1, estremi esclusi, si avrà

$$d(x \times y) = (x_2 - z\, dx)\, dy + (y_1 + z\, dy)\, dx ;$$

e dette x e y le quantità $x_2 - z\, dx$ e $y_1 + z\, dy$, che sono comprese fra x_1 e x_2, y_1 e y_2, estremi esclusi, si ha la formula da dimostrarsi.

La formula (III) si può enunciare:

« L'errore del prodotto di due fattori è eguale al primo fattore moltiplicato per l'errore del secondo, più il secondo fattore per l'errore del

primo ». Per questi fattori si debbono prendere valori compresi fra i valori per difetto e quelli per eccesso. Si può anche prendere un fattore per difetto e l'altro per eccesso.

Nella formula (III) si suppone

$$x \in x_1 - x_2 \quad , \quad y \in y_1 - y_2 ,$$

cioè che x e y sono convenienti valori compresi in quegli intervalli. Se invece suppongo

$$x = x_1 - x_2 \quad , \quad y = y_1 - y_2 ,$$

cioè che x e y rappresentino tutti i valori in quegli intervalli, la formula diventa

(III′) $$\mathrm{d}(x \times y) \in x \times \mathrm{d}y + y \times \mathrm{d}x .$$

Esempio:

$$\mathrm{d}(6{\cdot}78 \ldots \times 7{\cdot}89 \ldots) \in 6{\cdot}78 \ldots \times \mathrm{d}\,7{\cdot}89 \ldots + 7{\cdot}89 \ldots \times \mathrm{d}\,6{\cdot}78 \ldots =$$
$$= 6{\cdot}78 \ldots \times {\cdot}01 + 7{\cdot}89 \ldots \times {\cdot}01 = (6{\cdot}78 \ldots + 7{\cdot}89 \ldots) \times {\cdot}01 =$$
$$= (14{\cdot}67 - 14{\cdot}69) \times {\cdot}01 = {\cdot}1467 - {\cdot}1469 .$$

Prendendo un fattore per difetto e l'altro per eccesso, si ha errore $= {\cdot}1468$.

In pratica basta dire che l'errore in questo esempio, è $> 1/10$, ed è < 1.

Negli appositi trattati trovansi regole per stimare l'ordine decimale del prodotto di due numeri approssimati, e il modo di eseguire rapidamente la moltiplicazione, tralasciando i prodotti parziali inutili. Il prof. A. Tanturri espose con spirito critico questi studii negli Atti della R. Accademia di Torino, 1915, 25 aprile, *Prodotto di due numeri approssimati.*

La regola (III) permette di riconoscere subito la bontà d'ogni regola pratica.

(IV) $$\mathrm{d}(1/x) = -(\mathrm{d}x)/x^2 ,$$

ove x è un valore medio fra i valori positivi x_1 e x_2.

Infatti,

$$\mathrm{d}(1/x) = 1/x_2 - 1/x_1 = -(x_2 - x_1)/(x_1 x_2) = -\mathrm{d}x/(x_1 x_2) = -\mathrm{d}x/x^2 ,$$

chiamando x il valore $\sqrt{(x_1 x_2)}$ che è medio fra x_1 e x_2.

(V) $$\mathrm{d}(x^m) = m x^{m-1}\,\mathrm{d}x ,$$

ove m è un numero intero e positivo, ed x un valore medio fra i considerati.

Infatti, essendo la regola vera per $m = 1$, supposta la vera per un valore di m, si avrà:

$$\mathrm{d}(x^{m+1}) = \mathrm{d}(x^m \times x) \in x^m \times \mathrm{d}x + x \times m x^{m-1}\,\mathrm{d}x = (m+1)\,x^m\,\mathrm{d}x ,$$

cioè la formula resulta vera per $m+1$. In questo calcolo, $x = x_1 - x_2$ rappresenta ogni valore fra x_1 e x_2: e si sommano degli intervalli. Si sostituisce poi ad ε il segno $=$, supponendo che x sia un conveniente valore dell'intervallo $x_1 - x_2$.

(VI) $$\mathrm{d}\sqrt{x} = \mathrm{d}x/(2\sqrt{x}),$$

cioè « l'errore della radice quadrata d'una quantità positiva è eguale all'errore del radicando diviso per 2 volte la radice di un valore medio fra vero ed approssimato.

Infatti, $(\sqrt{x^2}) = x$, e differenziando, $(2\sqrt{x})\,\mathrm{d}\sqrt{x} = \mathrm{d}x$; onde la formula VI.

Esempio: Se $\pi = 3{\cdot}1415\ldots$, sarà

$$\mathrm{d}\sqrt{\pi} = \mathrm{d}\pi/(2\sqrt{\pi})\ ;$$

e siccome $\mathrm{d}\pi = {\cdot}0001$, e $2\sqrt{\pi} > 1$, sarà $\mathrm{d}\sqrt{\pi} < \mathrm{d}\pi$: cioè, se π è noto con 4 cifre decimali, anche $\sqrt{\pi}$ sarà noto con altrettante cifre.

(VII) $$\mathrm{d}\,\mathrm{Log}\,x = \mathrm{Log}\,\mathrm{e} \times \mathrm{d}x/x,$$

essendo x un valore medio fra le quantità positive x_1 e x_2, ed indicando Log i logaritmi in base, qualunque, p. es. 10.

Per dimostrare elementarmente questa formula, si deve premettere la definizione del numero « e », e questa si deve dare senza il concetto di limite di funzione (con cui si definisce la derivata), ma col solo concetto di limite superiore o inferiore d'una classe (che figura nella definizione del numero reale).

Perciò richiamo l'ineguaglianza

(1) $$x^m y^n < [(mx + ny)/(m+n)]^{m+n},$$

ove x e y sono quantità positive, non eguali; e m ed n sono numeri positivi, interi, o fratti, o reali. Essa significa che la media geometrica fra due quantità è minore della loro media aritmetica; e se ne conoscono numerose dimostrazioni elementari.

Pongo, nella (1), $1 + \frac{1}{m}$ al posto di x, e $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ al posto di y^n; avrò

(2) $$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1,$$

essendo m ed n due quantità positive qualunque. Moltiplico pel reciproco del secondo fattore, ed ho

$$(3) \qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Perciò esisteranno il limite superiore finito dei valori di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, ed il limite inferiore dei valori di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; e siccome, per $m=n$, il rapporto delle due quantità (3) è $1+1/n$, il cui limite inferiore è 0, segue che il limite superiore dei valori del primo membro della (3) è eguale al limite inferiore dei valori del secondo membro della (3); detto « e » questo limite comune, si avrà, per ogni valore positivo di m,

$$(1+1/m)^m < \mathrm{e} < (1+1/m)^{m+1} .$$

Siano ora x_1 e x_2 due quantità positive. Posto $m = x_1/(x_2-x_1)$, e presi i logaritmi, sarà

$$\frac{x_1}{x_2-x_1}\,\mathrm{Log}\,\frac{x_2}{x_1} < \mathrm{Log\ e} < \frac{x_2}{x_2-x_1}\,\mathrm{Log}\,\frac{x_2}{x_1} ,$$

da cui

$$\mathrm{Log}\,\frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2-x_1}{x_1}\,\mathrm{Log\ e} \quad , \quad > \frac{x_2-x_1}{x_2}\,\mathrm{Log\ e} ;$$

e, chiamando x un valore medio fra x_1 e x_2,

$$\mathrm{Log}\,\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2-x_1}{x}\,\mathrm{Log\ e} .$$

Ma il primo membro vale $\mathrm{Log}\,x_2 - \mathrm{Log}\,x_1 = \mathrm{d\,Log}\,x$; e $x_2 - x_1 = \mathrm{d}x$: onde la formula VII.

Le formule (V)-(VII) sono susseguite dalla frase « ove x è un valore medio ». Si può far dire ciò dalla formula stessa, modificando le notazioni.

Sia x un intervallo (estremi inclusi, per esempio). Pongo per definizione:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{l}'x - \mathrm{l}_1 x ,$$

cioè chiamo $\mathrm{d}x$ l'ampiezza dell'intervallo, differenza fra i suoi limiti superiore ed inferiore. Allora, se f è una funzione definita nell'intervallo x, fx è l'insieme dei suoi valori; se f è reale e continua, fx è un intervallo, e $\mathrm{d}fx$ ne è l'ampiezza. Si avrà allora:

(V′) $\qquad \mathrm{d}(x^m) \in m\,x^{m-1}\,\mathrm{d}x$

(VI′) $\qquad \mathrm{d}\sqrt{x} \in \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$

(VII′) $\qquad \mathrm{d\,Log}\,x \in \mathrm{Log\ e} \times \mathrm{d}x/x .$

I d sono tutti, con questa convenzione, quantità positive, perciò

$$\mathrm{d}(1/x) = (\mathrm{d}x)/x^2$$

perdendo il segno.

Chimica. — *Le due asparagine nei germogli.* Nota del Corrispondente A. Piutti.

Chimica fisiologica. — *Ricerche sul tessuto nervoso.* Nota I: *Proprietà chimiche e chimico-fisiche del succo nervoso*, del Corrispondente F. Bottazzi e di A. Craifaleanu.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'equazione integrale di 1ª specie, con nucleo non-simmetrico.* Nota del prof. P. J. Daniell, presentata dal Socio V. Volterra.

Il metodo impiegato in questa Nota è analogo a quello del dott. A. Vergerio, esposto nella sua Nota: *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (1).

Consideriamo l'equazione

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s\,,\,t)\,h(t)\,dt\,. \tag{1}$$

Invece della successione definita dal dott. Vergerio, definiamo

$$\begin{aligned}
g_1(s) &= \int_a^b \mathrm{K}(t\,,\,s)\,g(t)\,dt \\
g_2(s) &= \int_a^b \mathrm{K}(s\,,\,t)\,g_1(t)\,dt \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_{2n}(s) &= \int_a^b \mathrm{K}(s\,,\,t)\,g_{2n-1}(t)\,dt \\
g_{2n+1}(s) &= \int_a^b \mathrm{K}(t\,,\,s)\,g_{2n}(t)\,dt \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

(1) Questi Rendiconti, vol. XXIII, 2° sem. (1914), pag. 385

Se la $n - r$ è pari, avremo

$$\int_a^b g_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds = \int_a^b ds\, g_{n+r}(s) \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, g_{n-r-1}(t)\, dt$$
$$= \int_a^b dt\, g_{n-r-1}(t) \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, g_{n+r}(s)\, ds$$
$$= \int_a^b g_{n-r-1}(t)\, g_{n+r+1}(t)\, dt\,;$$

se ìmpari, avremo

$$\int_a^b g_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds = \int_a^b ds\, g_{n+r}(s) \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\, g_{n-r-1}(t)\, dt$$
$$= \int_a^b dt\, g_{n-r-1}(t) \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\, g_{n+r}(s)\, ds$$
$$= \int_a^b g_{n-r-1}(t)\, g_{n+r+1}(t)\, dt\,,$$

e quindi, qualunque siano n e r, si deduce che

$$\int_a^b g_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds = \int_a^b g_{n-r-1}(s)\, g_{n+r+1}(s)\, ds\,.$$

Trasformando questa identità, abbiamo

$$\mathrm{V}_n^2 = \int_a^b \{g_n(s)\}^2\, ds = \int_a^b n_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds\,,$$

e da quest'ultima equazione si procede precisamente come nell'articolo del Vergerio.

Se si ha

$$g_2(s) = \text{cost.}\; g(s) = c\, g(s)\,, \tag{2}$$

si avrà

$$\mathrm{V}_{n+1} = \int_a^b g_2(s)\, g_{2n}(s)\, ds = c \int_a^b g(s)\, g_{2n}(s)\, ds\,,$$

ossia

$$\mathrm{V}_{n+1} = c\, \mathrm{V}_n\,,$$
$$c_n = \frac{\mathrm{V}_{n+1}}{\mathrm{V}_n} = c.$$

Reciprocamente, se tutte le costanti c_n sono uguali fra loro, $c_n = c$; ne segue che

$$g_2(s) = c\, g(s)\,.$$

In questo caso si ha ovviamente che

$$h(t) = \frac{1}{c}\, g_1(t) = \frac{1}{c} \int_a^b \mathrm{K}(s\,,\,t)\, g(s)\, ds$$

è soluzione della (1) (1).

Matematica. — *Su alcune particolari quartiche piane di genere 3.* Nota di A. Terracini, presentata dal Socio C. Segre.

Vorrei mostrare in questa Nota l'esistenza di particolari quartiche piane, senza punti multipli, i cui 24 flessi godono della notevole proprietà di potersi distribuire a 4 a 4 in 6 *catene*, in modo che i 4 flessi di ciascuna *catena* appaiono come vertici di un quadrangolo semplice, ogni flesso essendo la residua intersezione della quartica colla tangente nel flesso che cade nel vertice precedente (2). Si tratta, come si vede, di una proprietà analoga a quella di cui gode la nota quartica di Klein (3), in cui i flessi si distribuiscono invece in otto catene di tre flessi ciascuna.

Il quadrangolo semplice, i cui lati, in un sistema di coordinate proiettive omogenee, hanno ordinatamente per equazione $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ha i suoi vertici nei 4 flessi di una catena, nel senso sopra indicato, per le C^4 rappresentate dall'equazione

$$x_1\, x_2\, x_3\, \mathrm{L} - k\, x_1\, x_2^3 - k\,(x_2 + x_3)^3\, x_2 + h\, x_1^3\, x_3 = 0,$$

dove

$$\mathrm{L} = l_1\, x_1 + l_2\, x_2 + l_3\, x_3\,,$$

$$k = \frac{l_1 + l_3 - 2l_2}{3} \quad , \quad h = \frac{l_1 + l_2 - 2l_3}{3}\,.$$

(1) Il prof. Evans nota che la funzione $\mathrm{G}_n(s)$ del Vergerio, per questo caso del nucleo non simmetrico, è identica alla funzione $g_{2n+1}(s)$ del Daniell. Però, la condizione $\mathrm{G}_2(s) = \Gamma_0\, \mathrm{G}(s)$ del Vergerio non è sufficiente perchè la funzione $h(t) = \mathrm{G}_1(t) / \Gamma_0$ sia soluzione della (1), come si vede dal caso particolare seguente:

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}(s\,,t)\, h(t)\, dt \\ \mathrm{K}(s\,,t) &= \sin\,(s - t) \\ g(s) &= \sin s + \sin 2s \\ \pi^4\, \mathrm{G}(s) &= \mathrm{G}_2(s) = \pi^5 \cos s. \end{aligned}$$

(2) La questione dell'esistenza di queste e di altre quartiche congeneri si trova posta in Ciani, *Le curve piane di quart'ordine*, Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLVIII, pp. 259-304 (ved. la pag. 302).

(3) Cfr. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, I Band, Leipzig 1890, Dritter Abschnitt, Kap. VI.

Imponiamo ora l'ulteriore condizione che la C^4 sia trasformata in sè dalle omografie cicliche del quarto ordine che trasformano in sè il quadrangolo semplice considerato, condizione che si traduce nelle

$$\begin{cases} l_2^2 + 3\,l_3^2 - 4\,l_2\,l_3 = 0, \\ 2\,l_3^2 + l_1\,l_2 - l_1\,l_3 - 2\,l_2\,l_3 = 0\,; \end{cases}$$

a cui si soddisfa assumendo $l_1\,,\ l_2\,,\ l_3$ proporzionali a 2, 3, 1, oppure a l, 1, 1, essendo l una quantità qualunque [1].

Posto ora

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_1 + x_2 : x_2 + x_3 : x_3 + x_1\,,$$

l'equazione della C^4 diviene rispettivamente, nei due casi,

$$y_1^4 - 2\,y_1^3\,y_2 - 2\,y_1\,y_2^3 - y_2^4 - y_1^2\,y_3^2 + y_2^2\,y_3^2 = 0\,,$$

$$(5\,l - 2)\,(y_1^4 + y_2^4) + 6\,(l - 2)\,y_1^2\,y_2^2 - 8\,(l - 1)\,y_1\,y_2\,(y_1^2 - y_2^2) - \\ - 6\,l\,(y_1^2 + y_2^2)\,y_3^2 + (l + 2)\,y_3^4 = 0\,.$$

La prima di queste due equazioni rappresenta una quartica avente un punto doppio, quartica che escluderemo dal seguito delle nostre considerazioni: ed escluderemo pure la quartica rappresentata dalla seconda equazione dove si faccia $l = 1$, quartica costituita dai quattro lati del quadrangolo semplice considerato; invece la stessa equazione per $l \neq 1$ rappresenta quartiche tutte irriducibili.

Poniamo ora

$$y_1 : y_2 : y_3 = a\,y_1' + b\,y_2' : c\,y_1' + d\,y_2' : y_3'\,,$$

con

$$ad - bc \neq 0\,,$$

e cerchiamo anzitutto di far scomparire dall'equazione trasformata le potenze dispari delle coordinate. Dovranno allora soddisfarsi le condizioni:

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ (5\,l - 2)\,(a^3\,b + c^3\,d) - 2\,(l - 1)\,(a^3\,d - bc^3 + 3\,a^2\,bc - 3\,ac^2\,d) + \\ \qquad + 3\,(l - 2)\,(a^2\,cd + abc^2) = 0 \\ (5\,l - 2)\,(a\,b^3 + c\,d^3) - 2\,(l - 1)\,(b^3\,c - ad^3 + 3\,ab^2\,d - 3\,bcd^2) + \\ \qquad + 3\,(l - 2)\,(b^2\,cd + abd^2) = 0\,. \end{cases}$$

Posto $a = 1$, risulta $b = -cd$; e quindi, poichè d è $\neq 0$, le ultime due condizioni si riducono all'unica

$$(5l - 2)\,(c^3 - c) - 2\,(l - 1)\,(1 - 6c^2 + c^4) + 3\,(l - 2)\,(c - c^3) = 0\,,$$

[1] Si può supporre che l sia finita, perchè la C^4, per cui $l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 0 : 0$, non ha importanza per le nostre ulteriori considerazioni.

cioè

$$(1)\quad (l-1)\,c^4-(l+2)\,c^3-6\,(l-1)\,c^2+(l+2)\,c+l-1=0\,.$$

E poichè dev'essere $ad-bc=d(1+c^2)\neq 0$, e quindi $c^2\neq -1$, dovremo supporre l tale che quest'uguaglianza possa soddisfarsi altrimenti che per $c=\pm i\,(i=\sqrt{-1})$: ossia sarà

$$l\neq\frac{14\mp 12\,i}{17}\quad,\quad \text{cioè}\quad 17\,l^2-28\,l+20\neq 0\,.$$

Volendo inoltre che l'equazione trasformata sia simmetrica in $y'_1\,,\,y'_2$, dovremo poi porre $d=\pm 1$; otteniamo, così,

$$[(5l-2)\,c^4+8(l-1)\,c^3+6\,(l-2)\,c^2-8\,(l-1)\,c+5l-2]\,(y'^4_1+y'^4_2)+$$
$$+6\,[(l-2)\,c^4-8(l-1)\,c^3+2\,(3l+2)\,c^2+8\,(l-1)\,c+l-2]\,y'^2_1\,y'^2_2-$$
$$-6\,l\,(1+c^2)\,(y'^2_1+y'^2_2)\,y'^2_3+(l+2)\,y'^4_3=0\,.$$

Poniamo infine

$$y'_1:y'_2:y'_3=uz_1:uz_2:z_3\,,$$

per ottenere un'equazione simmetrica nelle tre nuove coordinate: basterà determinare u in modo che sia $u^4\mathrm{M}=l+2$, $u^2\mathrm{P}=-\,l(1+c^2)$, dove M e P indicano i coefficienti di $y'^4_1+y'^4_2$, e di $6\,y'^2_1\,y'^2_2$ nell'ultima equazione scritta. E, affinchè ciò sia possibile, è necessario e sufficiente [1] che sia

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{M} & l+2 \\ \mathrm{P}^2 & l^2(1+c^2)^2 \end{vmatrix}=0\,.$$

Ora, tenuto conto della (1), quest'equazione si può, con successive riduzioni, trasformare nella

$$(3)\quad (l+2)\,(9\,l^3-45\,l^2+60\,l-36)\,(1-2\,c^2+c^4)+$$
$$+(77\,l^4-44\,l^3-116\,l^2+224\,l-96)\,(c-c^3)+$$
$$+(l-1)\,(3\,l-2)\,(-12\,l^2+16\,l-16)\,c^2=0\,.$$

Per cercare le condizioni di compatibilità di questa equazione colla (1), poniamo $c-\dfrac{1}{c}=\theta$ cosicchè la (1) e la (3) divengono rispettivamente

$$(1')\qquad (l-1)\,\theta^2-(l+2)\,\theta-4\,(l-1)=0$$

e

$$(3')\quad (l+2)\,(9\,l^3-45\,l^2+60\,l-36)\,\theta^2-$$
$$(77\,l^4-44\,l^3-116\,l^3+224\,l-96)\,\theta-4(l-1)\,(3l-2)\,(3l^2-4l+4)=0.$$

[1] La condizione è anche sufficiente, poichè non possono M e P essere contemporaneamente nulli (la quartica conterrebbe allora doppiamente la retta $y'_3=0$, il che è assurdo).

Eliminando θ ed escludendo sempre per l il valore 1, si trova per l la condizione

$$\begin{aligned}&[-(l-1)(77l^4-44l^3-116l^2+224l-96)+\\&\qquad+(l+2)^2(9l^3-45l^2+60l-36)]\times\\&\times[(l+2)(3l-2)(3l^2-4l+4)-(77l^4-44l^3-116l^2+224l-96)]=\\&\qquad=64(l-1)(17l^2-28l+20)^2.\end{aligned}$$

Dividendo i due membri per $16(17l^2-28l+20)^2$, il che è lecito poichè, come abbiamo avvertito sopra, dobbiamo supporre non nulla l'espressione che sta in parentesi, troviamo infine

$$(l^3-l+3)(l^2+l-1)=4(l-1),$$

ossia:

$$l^5+l^4-2l^3+2l^2+1=0, \tag{4}$$

equazione che si verifica facilmente essere irriducibile. Il valore di θ, che è radice comune delle (1′) e (3′), risulta poi

$$\theta=-(l^2+l-1). \tag{5}$$

L'equazione della C^4 assume pertanto la forma

$$z_4^4+z_2^4+z_3^4+6\varrho(z_2^2z_3^2+z_3^2z_1^2+z_1^2z_2^2)=0 \tag{6}$$

con

$$\varrho=\frac{-l(1+c^2)}{l+2}u^2=\frac{l^2(1+c^2)^2}{(l+2)\,\mathrm{P}},$$

dove i valori di l e di θ (e quindi anche di c) si desumono dalle (4), (5). Con successive riduzioni si trova

$$\varrho=\frac{2l^4-5l^3+4l^2-1}{2l^4+3l^3+4l^2-12l+15}. \tag{7}$$

Il risultato dell'eliminazione di l fra le (5) e (7) è

$$\begin{vmatrix} -\varrho-7 & -8\varrho+8 & 16\varrho-4 & -15\varrho-1 & 2\varrho-2\\ -8\varrho+8 & 6\varrho-10 & 3\varrho+9 & -13\varrho-3 & 3\varrho+5\\ 16\varrho-4 & 3\varrho+9 & -29\varrho-11 & 33\varrho+7 & 4\varrho-4\\ -15\varrho-1 & -13\varrho-3 & 33\varrho+7 & -26\varrho-6 & -12\varrho\\ 2\varrho-2 & 3\varrho+5 & 4\varrho-4 & -12\varrho & 15\varrho+1 \end{vmatrix}=0,$$

ossia

$$180\varrho^5-368\varrho^4+109\varrho^3+21\varrho^2-5\varrho-1=0. \tag{8}$$

Anche quest'equazione è irriducibile: le sue cinque radici sostituite nella (6)

conducono ad altrettante C^4, senza punti multipli (1), i cui flessi si distribuiscono precisamente in sei catene del tipo richiesto. Infatti ciascuna di quelle C^4 è invariante pel gruppo ottaedrico delle proiettività rappresentate da

$$\begin{pmatrix} \pm z_i & \pm z_j & \pm z_k \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

dove $i\,j\,k$ indica una permutazione degli indici 1, 2, 3; e su di essa vi sono già quattro flessi appartenenti a una catena, siano $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$. Ogni ulteriore flesso F si può ottenere da uno qualsiasi di questi quattro, per es. da A_1 mediante una proiettività π del gruppo, perchè nell'ipotesi contraria dovrebbe A_1 essere unito in una proiettività non identica del gruppo, che muterebbe in sè anche la tangente in A_1 e quindi A_2, A_3 e A_4, il che è assurdo: quella proiettività π muterà dunque la catena $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ in una analoga a cui appartiene il flesso F.

Le cinque C^4 trovate sono a due a due proiettivamente distinte: infatti gli invarianti A e B, rispettivamente del terzo e del sesto ordine nei coefficienti, per una quartica rappresentata dalla (6) valgono (2)

$$1 + 9\varrho^2 + 6\varrho^3 \quad \text{e} \quad \varrho^3(1 - 3\varrho^2 + 2\varrho^3).$$

Se due fra quelle cinque C^4 si potessero trasformare l'una nell'altra mediante una proiettività, dovrebbe l'invariante assoluto

$$\frac{A^2}{B} = \frac{(1 + 9\varrho^2 + 6\varrho^3)^2}{\varrho^3(1 - 3\varrho^2 + 2\varrho^3)}$$

acquistare lo stesso valore per due diverse radici della (8), e quindi, data l'irriducibilità di questa equazione, per tutte le sue radici. E si verifica che così non è, osservando che i resti delle divisioni di A e di B pel primo membro della (8) non dànno un rapporto costante.

Concludiamo dunque: *esistono cinque* C^4 *senza punti multipli, proiettivamente distinte, i cui flessi si distribuiscono in sei quaterne* (*c a t e n e*) *in modo che i quattro flessi di ciascuna quaterna sono vertici di un quadrangolo, ogni flesso essendo la residua intersezione della* C^4 *colla tangente nel flesso che cade nel vertice precedente. Esse sono invarianti per un gruppo ottaedrico di proiettività: le loro equazioni si ottengono dalla* (6), *ponendo per* ϱ *una delle radici della* (8).

(1) Infatti quelle cinque C^4 sono irriducibili; e la sola C^4 irriducibile rappresentata dalla (6) e dotata di punti doppî si ottiene per $\varrho = \infty$.

(2) Cfr. Salmon, *Traité de géométrie analytique*: *courbes planes* (trad. par O. Chemin, Paris 1903); ved. il num. 299.

Matematica. — *Successioni di curve e derivazione per serie.* Nota I di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

Mi propongo di dimostrare il seguente teorema:

Se $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ *è una successione di curve continue, rettificabili, tendenti ad un'altra curva, continua e rettificabile,* C, *in modo che la lunghezza della* C_n *tenda a quella, supposta finita, della* C, *le tangenti della* C_n *tendono in misura alle tangenti della* C.

Questa proposizione permette di dimostrare che:

a) Sotto le stesse ipotesi, è

$$\int_{C_n} F(x, y, z, x', y', z')\, ds_n \longrightarrow \int_C F(x, y, z, x', y', z')\, ds,$$

dove la F soddisfa a certe condizioni, che saranno precisate più innanzi (n. 6), le quali sono più generali di quelle sotto cui tale proposizione fu già da me stabilita altrove, per via del tutto diversa (1).

b) Supposto: 1°) *che la successione di funzioni, date su* (a, b), $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ *converga quasi dappertutto verso una funzione* $u(x)$; 2°) *che la lunghezza della curva* $y = u_n(x)$ *tenda a quella, supposta finita, di* $y = u(x)$; 3°) *che la successione delle derivate (considerate là dove esistono)* $u_1'(x), u_2'(x), \ldots, u_n'(x), \ldots$ *sia quasi dappertutto convergente; è quasi dappertutto* $\lim_{n\to\infty} u_n'(x) = u'(x)$. Come caso particolare si ritrova il teorema dato recentemente da G. Fubini (2): *se* $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, definite in* (a, b), *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie.* E vogliamo notare che di questa proposizione si ha così una dimostrazione diretta, indipendente cioè dall'integrazione per serie e dal concetto d'integrale.

Per giungere al primo teorema sopra enunciato, riprenderemo la proposizione, dovuta a H. Lebesgue, secondo la quale una curva continua, rettificabile, ha tangente quasi dappertutto; dandone una dimostrazione indipendente dal concetto di misura e da quello di integrale. Già in questo senso la dimostrazione della proposizione detta fu ripresa, nel 1909, da G. Faber (3), il quale raggiunse lo scopo dimostrando dapprima che una funzione a rapporto incrementale limitato ha derivata quasi dappertutto, e poi che il li-

(1) Questi Rendiconti, maggio 1912.
(2) Questi Rendiconti, febbraio 1915.
(3) Math. Ann., 1910 (B. 69).

mite del rapporto fra la corda e l'arco di una curva rettificabile tende quasi dappertutto all'unità, e deducendo infine la voluta proposizione dall'equazione $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$. La nostra dimostrazione è più diretta di quella del Faber, in quanto non ha bisogno di passare per le proposizioni intermedie sopra ricordate; e serba, inoltre, un carattere puramente geometrico.

1. Sia $F(\delta)$ una funzione definita per ogni intervallo *non nullo* δ di (a, b), e sempre continua: in altre parole, la $F(\delta)$ è una funzione degli estremi x_1 e x_2 di δ, definita e continua in tutto il campo determinato dalle disuguaglianze $x_1 < x_2$, $a \leq x_1$, $x_2 \leq b$. Ad ogni punto di questo campo corrisponde un δ non nullo di (a, b), e viceversa. Sia E l'insieme dei punti del campo detto, nei quali è $F(\delta) \geq 0$; e indichiamo con l il limite superiore della differenza $x_2 - x_1$ su E. Il sottogruppo di questo insieme, definito dalla disuguaglianza $x_2 - x_1 \geq \frac{1}{2} l$, è *chiuso*; in esso, perciò, $x_2 - x_1$ raggiunge il suo massimo. Fra i punti di massimo, si consideri quello per il quale x_1 è minimo, e si indichi con Δ_1 l'intervallo di (a, b) che gli corrisponde. Δ_1 è dunque il più a sinistra dei massimi intervalli δ per i quali è $F(\delta) \geq 0$: e perchè esista, è necessario e basta che esista almeno un δ per il quale la $F(\delta) \geq 0$ risulti verificata. Sia poi Δ_2 il più a sinistra dei massimi intervalli δ che hanno al più in comune con Δ_1 un estremo e per i quali è $F(\delta) \geq 0$; sia ancora Δ_3 il più a sinistra dei massimi intervalli δ che hanno al più un estremo in comune con Δ_1, e così pure con Δ_2, e per i quali è ancora $F(\delta) \geq 0$; e così via indefinitamente, o finchè la determinazone dei Δ_m è possibile. Si ottiene così un numero finito o un'infinità numerabile di intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_m, \ldots$ i quali godono delle seguenti proprietà: *a*) due qualunque di essi hanno al più un estremo in comune; *b*) indicando con lo stesso simbolo Δ_m anche la lunghezza dell'intervallo, è $\Delta_m \geq \Delta_{m+1}$; *c*) è $F(\Delta_m) \geq 0$; *d*) se δ è un intervallo qualunque di (a, b) che non coincide con nessun Δ_m e che ha entrambi gli estremi *non interni* ai Δ_m, è $F(\delta) < 0$. Per dimostrare questa ultima proprietà, osserviamo che uno qualsiasi dei δ, che qui si considerano, non può contenere, di un Δ_m, più di un punto senza contenerlo interamente; ed allora, se δ contiene qualche Δ_m, detto $\overline{m}$ il minor indice dei Δ interni a δ, ne viene $F(\delta) < 0$ per la definizione stessa di $\Delta_{\overline{m}}$. Se poi δ non contiene nessun Δ_m, deve essere $F(\delta) < 0$ perchè, altrimenti, i Δ_m sarebbero in numero infinito, si avrebbe sempre $\Delta_m \geq \delta$ e la $\Sigma \Delta_m$ sarebbe divergente, mentre le sue somme parziali sono sempre $< b - a$. Il gruppo dei Δ_m, così determinato, lo diremo *sistema degli intervalli* Δ, *relativo alla funzione* $F(\delta)$ *e all'intervalto* (a, b). Ricordiamo che questo sistema esiste effettivamente sotto la sola condizione che esista almeno un δ tale che $F(\delta) \geq 0$.

Costruiamo ora, per ogni Δ_m, un segmento $\bar{\Delta}_m$, di lunghezza tripla e avente il centro in comune con Δ_m, avvertendo però di sopprimere quelle sue parti che eventualmente venissero a trovarsi fuori di (a, b). Per tale sistema, dimostriamo che, *se δ è un intervallo di (a, b) avente almeno un estremo esterno a tutti gli intervalli $\bar{\Delta}$, è* $F(\delta) < 0$. Osserviamo che quello dei due estremi di δ che è esterno a tutti i $\bar{\Delta}$ risulta anche esterno a tutti i Δ. Se, allora, l'altro estremo non è interno a qualche Δ, la proposizione scende dalla proprietà d). Nel caso contrario, detto Δ_m l'intervallo a cui quest'altro estremo è interno, dovrà essere $\delta > \Delta_m$ (per il modo nel quale si è costruito $\bar{\Delta}_m$ e per essere un estremo di δ esterno a $\bar{\Delta}_m$); e questa disuguaglianza mostra che, se δ non contiene dei Δ di indice $< m$, deve aversi $F(\delta) < 0$, per la definizione stessa di Δ_m. Che se poi, di tali intervalli, δ ne contenesse almeno uno, detto $\Delta_{m'}$ quello di indice minore ($m' < m$), dovrebbe essere $F(\delta) < 0$, per la stessa definizione di $\Delta_{m'}$. È bene osservare, per il seguito, che è $\Sigma \bar{\Delta}_m \leq 3 \Sigma \Delta_m$, e che, se i Δ non esistono (il che avviene solo se non esistono neppure i Δ), la $F(\delta) < 0$ risulta sempre verificata.

2. Sia C una curva continua e rettificabile, di lunghezza L e di estremi (primo e secondo) A e B (i quali coincidono se la curva è chiusa). Detto P un punto arbitrariamente scelto in C, si indichi con s la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AP}$ di C; detto poi P′ un altro punto di C, si indichi con $\overline{PP'}$ tanto la corda che congiunge P e P′ quanto la lunghezza della corda medesima. Su ogni corda $\overline{PP'}$, si dirà senso positivo quello che va dall'estremo che precede a quello che segue, nell'ordine stabilito dal senso positivo della curva. Date due corde $\overline{PP'}$, $\overline{P_1P_1'}$, diremo loro angolo quello, compreso fra 0 e π (estremi inclusi), delle loro direzioni positive, e lo indicheremo con $\alpha(\overline{PP'}, \overline{P_1P_1'})$. Ciò premesso, si fissi, sulla curva C, un sistema di punti $A \equiv P^{(0)} < P^{(1)} < P^{(2)} < \cdots < P^{(p)} \equiv B$ [1] e si consideri la poligonale π inscritta in C e avente questi punti come vertici successivi. Si indicherà con la stessa lettera π anche la lunghezza di tale poligonale (lunghezza $\leq L$). Si prendano a considerare un lato generico di π, $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$, e l'arco $\overset{\frown}{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ di C. Dette $s^{(r-1)}, s^{(r)}$, le lunghezze degli archi $\overset{\frown}{P^{(0)}P^{(r-1)}}$, $\overset{\frown}{P^{(0)}P^{(r)}}$, ad ogni punto dell'arco $\overset{\frown}{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ viene a corrispondere un punto, ed uno solo, del segmento $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$, e viceversa, se si prende, per corrispondente di un punto P, il numero s che misura la lunghezza di $\overset{\frown}{P^{(0)}P}$. Detti $\delta \equiv (s, s')$ e $\overline{PP'}$ un segmento qualsiasi non nullo di $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$ e la

[1] La scrittura $P < Q$ significa che, su C, P precede Q.

corda corrispondente, preso ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < 1$, e fatto $F(\delta) \equiv \alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) - \varepsilon$, potremo costruire, per il n. 1, i due sistemi d'intervalli Δ e $\bar{\Delta}$, relativi alla $F(\delta)$ qui fissata e all'intervallo $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$. Gli intervalli di tali sistemi li contrassegneremo con l'indice r e scriveremo $\Delta^{(r)}, \bar{\Delta}^{(r)}$. Dal numero precedente risulta: 1°) $\sum_m \bar{\Delta}_m^{(r)} \leq 3 \sum_m \Delta_m^{(r)}$; 2°) se P e P' corrispondono agli estremi di uno stesso $\Delta^{(r)}$, è $\alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) \geq \varepsilon$; 3°) se (s, s') è un intervallo di $(s^{(r-1)}, s^{(r)})$ avente un estremo esterno a tutti i $\bar{\Delta}^{(r)}$, è $\alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) < \varepsilon$. Si considerino ora i sistemi $\Delta^{(r)}, \bar{\Delta}^{(r)}$ relativi a tutti i valori di r, da 1 a p; e fra tutti gli intervalli $\Delta_m^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots p\ ;\ m = 1, 2, \ldots)$ se ne scelgano q ad arbitrio e si indichino con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$. Si inscriva in C la poligonale π' (la cui lunghezza indicheremo ancora con π') i cui vertici (che si presentano su π' nello stesso ordine in cui si trovano su C) siano dati da tutti quelli di π e dai punti di C che corrispondono agli estremi degli intervalli $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_q$. È, evidentemente, $\pi < \pi' \leq L$ e perciò $\pi' - \pi \leq L - \pi$. Sia π_1' la somma delle lunghezze di quei lati di π', ciascuno dei quali corrisponde ad uno dei segmenti $\Delta_1, \ldots \Delta_q$ e fa un angolo compreso fra ε e $\frac{\pi}{2}$ (estremi inclusi) con $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$, essendo $P^{(r-1)}$ e $P^{(r)}$ i vertici consecutivi di π che comprendono fra loro gli estremi del lato considerato; π_2', la somma delle lunghezze dei lati che corrispondono ai rimanenti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$; π_3', la parte restante di π'. Il lato $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ della π è minore o uguale alla somma dei valori assoluti delle proiezioni ortogonali, fatte su $\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ stesso, di quei lati di π', compresi fra $P^{(r-1)}$ e $P^{(r)}$, che formano con esso un angolo $\leq \frac{\pi}{2}$. Queste proiezioni sono poi sempre minori o uguali alla lunghezza dei lati che si proiettano e, nel caso che i lati proiettanti corrispondano a qualcuno degli intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_q$, anche minori o uguali ai lati stessi moltiplicati per $\cos\varepsilon$. Si ha così

$$\pi = \sum_{r=1}^{p} \overline{P^{(r-1)}P^{(r)}} < \pi_1' \cos\varepsilon + \pi_3' < \pi' - (\pi_1' + \pi_2')(1 - \cos\varepsilon).$$

donde $\pi_1' + \pi_2' \leq \frac{L - \pi}{1 - \cos\varepsilon} < 3\frac{L - \pi}{\varepsilon^2}$. Osserviamo qui che $\pi_1' + \pi_2'$ dà la somma delle lunghezze di tutti quei lati di π' che corrispondono ai segmenti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$, e che le lunghezze degli archi di C sottesi da tali lati sono date precisamente da $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$. Di più, ogni termine della somma $\sum_1^q \Delta_t$ è maggiore o uguale al termine corrispondente di $\pi_1' + \pi_2'$, e la differenza $\Sigma\Delta_t - (\pi_1' + \pi_2')$ non può superare $L - \pi'$ e quindi nep-

pure $L - \pi$. Si ha dunque $\sum_1^q \Delta_i < L - \pi + (\pi_1' + \pi_2') < 4\frac{L-\pi}{\varepsilon^2}$. Questa disuguaglianza vale qualunque sia il gruppo $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q$ scelto fra tutti gli $\Delta_m^{(r)}$; vale quindi anche l'altra $\sum_{r=1}^{p} \sum_m \Delta_m^{(r)} \leq 4\frac{L-\pi}{\varepsilon^2}$, ed è perciò $\sum_{r=1}^{p} \sum_m \bar{\Delta}_m^{(r)} \leq 12\frac{L-\pi}{\varepsilon^2}$. Se ne conclude, se i vertici di π sono scelti in modo da rendere $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}$, che è $\sum_{r=1}^{p} \sum_m \bar{\Delta}_m^{(r)} < \varepsilon$; e si può enunciare la proposizione: *fatta eccezione al più per i punti di* C *appartenenti all'infinità numerabile degli archi* $\bar{\Delta}_m^{(r)}$, *di misura totale* $< \varepsilon$, *per ogni altro punto* P *di* C *vale la seguente proprietà: qualunque sia* P', *appartenente allo stesso arco* $\overset{\frown}{P^{(r-1)}P^{(r)}}$ *del quale fa parte* P. *si ha* $\alpha(\overline{P^{(r-1)}P^{(r)}}, \overline{PP'}) < \varepsilon$, *dove* ε *è un numero positivo* < 1, *arbitrariamente scelto, e* $P^{(0)} \equiv A$, $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots P^{(p)} \equiv B$ *sono i vertici di un poligono* π, *inscritto in* C, *tale che sia* $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}$.

3. Detti P, P', P'' tre punti qualsiasi di C, si ha allora

$$\underset{P' \to P,\, P'' \to P}{\text{Mass. Lim.}}\, \alpha(\overline{PP'}, \overline{PP''}) < 2\varepsilon,$$

eccettuati al più i punti P appartenenti agli intervalli $\bar{\Delta}_m^{(r)}$, ed eccettuati anche i $p+1$ vertici di π.

Si stabilisca che il poligono π sia quello che, fra i poligoni corrispondenti a divisioni di C in archi di ugual lunghezza e soddisfacenti alla $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}$, ha il minor numero di lati. Sostituendo, ad ε, via via $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \dots, \frac{\varepsilon}{2^p}, \dots$, e riunendo tutti gli intervalli $\bar{\Delta}_m^{(r)}$ corrispondenti ai diversi valori di p, si ha una successione di intervalli di lunghezza complessiva $< 2\varepsilon$; ed esclusi i punti di questi intervalli ed i punti dell'insieme numerabile formato dai vertici di tutti i poligoni π costruiti, esiste per tutti gli altri la tangente alla C. Siccome ε è arbitrario, il teorema del Lebesgue è dimostrato.

4. Consideriamo ora la successione $C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$ di curve continue, rettificabili, tendenti alla C, pure continua e rettificabile; e supponiamo che la lunghezza L_n della C_n tenda a quella L della C. Indicata con s la lunghezza dell'arco della C compreso fra il primo estremo A ed un punto qualunque P della curva stessa, sia $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$, $(0 \leq s \leq L)$, la rappresentazione analitica della C in funzione del parametro s. Analogamente, avremo la rappresentazione analitica $x = x_n(s_n)$,

$y = y_n(s_n)$, $z = z_n(s_n)$, $(0 \leq s_n \leq L_n)$ della C_n in funzione della lunghezza s_n del suo arco $\widehat{A_n P_n}$.

Se poniamo $s = \frac{L}{L_n} s_n$, abbiamo, per tutte le C_n e per la $C \equiv C_0$, la rappresentazione analitica simultanea

(1) $x = f_n(s)$, $y = g_n(s)$, $z = h_n(s)$, $(0 \leq s \leq L)$, $(n = 0, 1, 2, ...)$;

e, ad ogni segmento di $(0, L)$ di ampiezza δ, corrisponde su C_n un arco di lunghezza $\delta_n = \frac{L_n}{L} \delta$; e viceversa, ad ogni arco di C_n di ampiezza δ_n, corrisponde su $(0, L)$ un segmento di lunghezza $\delta = \frac{L}{L_n} \delta_n$. Data la convergenza della C_n verso la C, le funzioni f_n, g_n, h_n convergono uniformemente verso f_0, g_0, h_0, rispettivamente; e il punto P_n di C_n, corrispondente al valore s del parametro, tende a quello P di C, relativo allo stesso s. Indichiamo con E l'insieme, di misura nulla, comprendente tutti i punti di $(0, L)$ per i quali manca la tangente ad almeno una delle curve C_n $(n = 0, 1, 2, ...)$. Consideriamo poi il poligono π, inscritto in C, che è stato determinato nel n. 3, in corrispondenza ad ε, e diciamo $P^0 \equiv A$, $P^{(1)}$, ... , $P^{(p)} \equiv B$, i suoi vertici consecutivi. Ad essi corrispondono su C_n i punti $P_n^{(r)}$ $(r = 0, 1, ... p)$, vertici di un poligono π_n inscritto in C_n. Scegliamo $\bar{n}$ in modo che, per ogni $n > \bar{n}$, sia: 1°) $\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}} \, , \, \overline{P_n^{(r-1)} P_n^{(r)}}) < \varepsilon$, $(r = 1, 2, ... p)$; 2°) $L_n - \pi_n < \frac{\varepsilon^3}{12}$ $\left(\text{ricordiamo che è } L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{12}\right)$; 3°) $|L_n - L| < \frac{L}{2}$. Fissato un $n > \bar{n}$, si considerino gli intervalli $\bar{\Delta}_m^{(r)}$, della proposizione del n. 2, relativi alla C, ed anche quelli relativi alla C_n; a questi ultimi corrispondono su $(0, L)$ degli intervalli di lunghezza complessiva $< \frac{L}{L_n} \varepsilon < 2\varepsilon$, i quali si possono riunire con quelli relativi a C in una unica successione S_n (di misura $< 3\varepsilon$). Detto s un punto esterno a tutti gli intervalli di S_n e all'insieme E, le tangenti t e t_n, nei punti P e P_n delle C e C_n, ad esso corrispondenti, formeranno fra loro (per la proposizione del n. 2 e per la $\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}} \, , \, \overline{P_n^{(r-1)} P_n^{(r)}}) < \varepsilon$) un angolo $< 3\varepsilon$. Siccome ε è arbitrario, e $m(E) = 0$, $m(S_n) < 3\varepsilon$, e poichè ciò vale per ogni $n > \bar{n}$, è dimostrato che *le tangenti* t_n *tendono in misura alle tangenti* t.

5. Viceversa, si ha facilmente che, *supposta sempre la* C_n *tendente alla* C, *se le lunghezze della* C_n *e della* C *sono finite e se la tangente* t_n *alla* C_n *converge in misura a quella* t *della* C — *essendo* t_n *e* t *corrispondenti secondo la rappresentazione* (1) — *allora la lunghezza della* C_n *tende a quella della* C.

6. Sia $F(x, y, z, x', y', z')$ una funzione finita e continua per tutti i valori di x, y, z, di un certo campo Γ, nel quale siano contenute tutte le C_n, e per tutte le terne x', y', z' soddisfacenti alla $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. La F sia, inoltre, positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle x', y', z': soddisfi cioè, per ogni $k > 0$, all'uguaglianza

$$F(x, y, z, kx', ky', kz') = kF(x, y, z, x', y', z').$$

Si ha immediatamente

$$\int_{C_n} F(x, y, z, x', y', z')\, ds_n = \int_0^L F(f_n(s), g_n(s), h_n(s), f_n'(s), g_n'(s), h_n'(s))\, ds.$$

Dal n. 4 risulta che $f_n'(s), g_n'(s), h_n'(s)$ tendono in misura a $f_0'(s)$, $g_0'(s), h_0'(s)$, e poichè $F(f_n(s), g_n(s), \ldots)$ resta, qualunque sia n, inferiore in modulo ad un numero fisso, si ha, per un teorema sull'integrazione per serie, dovuto al Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} F\, ds_n = \int_C F\, ds.$$

7. Si consideri la successione di funzioni $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ dell'enunciato *b*) dell'introduzione. Le $u_n(x)$ risultano (almeno da un certo punto in poi; e senza restrizione possiamo suppore che ciò sia per ogni n) a variazione limitata e quindi prive di punti di discontinuità di 2ª specie. Indichiamo con C_n la curva ottenuta aggiungendo ai punti di $y = u_n(x)$ i segmenti, paralleli all'asse delle y, aventi per estremi i punti $(x, u_n(x-0))$, $(x, u_n(x))$ e $(x, u_n(x))$, $(x, u_n(x+0))$. Questa C_n risulta continua e rettificabile e di lunghezza, L_n, uguale a quella della $y = u_n(x)$. Lo stesso dicasi per la curva $C \equiv C_0$ corrispondente a $y = u(x) \equiv u_0(x)$. Per le ipotesi fatte, nell'enunciato ricordato, e per un noto teorema di Hilbert sull'esistenza di una curva limite per le successioni di curve inferiori in lunghezza ad un numero fisso, le C_n convergono alle C, e le tangenti t_n di C_n convergono perciò in misura a quelle t di C. Riprendiamo la rappresentazione (1) delle curve C_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ e indichiamo con E_ε un insieme di punti di $(0, L)$, di misura $> L - \varepsilon$, sul quale la tangente alla C esiste e varia con continuità. Sia n_p il primo intero positivo $> n_{p-1}$ [1] per il quale è $L_{n_p} < 2L$ e $m(E_{n_p}) > m(E_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2^p}$, dove E_{n_p} indica il componente di E_ε nei cui punti la tangente t_{n_p} alla C_{n_p} esiste e forma, con la corrispondente tangente t alla C, un angolo $< \frac{\varepsilon}{2^p}$. Ai punti di E_ε corrispondono sulla C dei punti che formano un insieme di misura (contata sulla curva stessa) uguale

[1] Per $p = 1$ questa condizione si ometterà.

a $m(E_\varepsilon)$ e che si proiettano ortogonalmente su (a, b) in un insieme I_ε di misura $> (b-a) - \varepsilon$ (perchè il complementare dell'insieme detto sulla curva ha misura $< \varepsilon$ e si proietta in un insieme di misura $< \varepsilon$). Parimenti ai punti di E_{n_p} corrispondono sulla C_{n_p} dei punti che, pvoiettati ortogonalmente su (a, b), dànno un insieme I_{n_p} di misura $> (b-a) - 4\varepsilon$ (perchè il complementare dell'insieme detto sulla curva ha misura $< \frac{L_n}{L}\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^p}\right) < 4\varepsilon$ e si proietta su (a, b) in un insieme di misura $< 4\varepsilon$). Sia I'_ε l'insieme *limite-completo* della successione di insiemi $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots I_{n_p}, \ldots$ la cui misura, secondo un teorema dovuto al Borel, è $> (b-a) - 4\varepsilon$, e I''_ε la parte comune a questo I'_ε, a I_ε, all'insieme dei punti nei quali esistono finite tutte le $u'_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e a quello ove la successione delle $u'_n(x)$ converge. È $m(I''_\varepsilon) > (b-a) - 5\varepsilon$. Consideriamo un punto x di I''_ε. Questo x appartiene ad un'infinità di insiemi $I_{n_p} : I_{n'_1}, I_{n'_2}, \ldots I_{n'_p}, \ldots$.

Indichiamo con $P_{n'_p}^{(n'_p)}$ il punto $(x, u_{n'_p}(x))$ della $C_{n'_p}$, con P quello $(x, u(x))$ della C; con $P^{(n'_p)}$ quello della C che corrisponde a $P_{n'_p}^{(n'_p)}$. Siccome su E_ε la tangente alla C varia con continuità, possiamo dire che, per tutti i punti della C abbastanza vicini a P, e corrispondenti a punti di E_ε, la u' esiste finita, e differisce da $u'(x)$ per quanto poco si vuole; preso dunque $\eta > 0$, è possibile di determinare un σ in modo che sia $u'(x) - u'(x_1) < \eta$ se x_1 appartiene a I_ε ed è $|x - x_1| < \sigma$. Per la convergenza della $C_{n'_p}$ alla C, si può determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $n'_p > \bar{n}$ la distanza fra $P^{(n'_p)}$ e $P_{n'_p}^{(n'_p)}$ sia $< \sigma$: e poichè $P_{n'_p}^{(n'_p)}$ al crescere indefinito di n'_p tende a P, si ha che, per ogni n'_p maggiore di un certo $\bar{\bar{n}} > \bar{n}$, la distanza fra P e $P^{(n'_p)}$ è $< \sigma$. Pertanto, detta $x_{n'_p}$ l'ascissa di $P^{(n'_p)}$, è $|x - x_{n'_p}| < \sigma$ e perciò $|u'(x) - u'(x_{n'_p})| < \eta$. D'altra parte, poichè x appartiene a $I_{n'_p}$, la tangente $t_{n'_p}^{(n'_p)}$ alla $C_{n'_p}$, nel punto $P_{n'_p}^{(n'_p)}$ fa con quella $t^{(n'_p)}$ alla C in $P^{(n'_p)}$ un angolo $< \frac{\varepsilon}{2^p}$: dunque la differenza $u'(x_{n'_p}) - u'_{n'_p}(x)$ tende a zero al crescere di n'_p e si ha, per ogni $n'_p >$ di un certo N, $|u'(x) - u'_{n'_p}(x)| < 2\eta$. Poichè in x la $u'_n(x)$ converge per $n \to \infty$, è $\lim_{n \to \infty} u'_n(x) = u'(x)$. Avendo l'insieme I''_ε una misura $> (b-a) - 5\varepsilon$, dove ε è arbitrario, l'uguaglianza precedente resta dimostrata quasi dappertutto.

Osservazione. — Nell'enunciato b) si può supporre che la $n_1(x)$, $n_2(x), \ldots, n_n(x), \ldots$ *converga solo in misura verso la* $n(x)$.

8. Supponiamo le $u_n(x)$ monotòne e, per es., non decrescenti. Allora, eccettuato un insieme E, di misura nulla, le $u'_n(x)$, $u'(x)$ esistono finite e sono ≥ 0; e siccome, supponendo $u(x) = \Sigma u_n(x)$, è

$$u(x+h) - u(x) = \sum \{u_n(x+h) - u_n(x)\} > \sum_1^r \{u_n(x+h) - u_n(x)\},$$

nel complementare di E è $u' \geq \sum_1^r u'_n(x)$, onde $\sum u'_n(x)$ converge quasi dappertutto. È poi

$$\sqrt{h^2 + \{u(x+h) - u(x)\}^2} > \sqrt{h^2 + \{\sum_{11}^r u_n(x+h) - \sum_1^r u_n(x)\}^2},$$

e quindi, ad ogni poligonale inscritta in $y = \sum_1^r u_n(x)$, ne corrisponde una di maggior lunghezza inscritta in $y = u(x)$. La lunghezza di $y = \sum_1^r u_n(x)$ tende dunque a quella di $y = u(x)$. Dal teorema del numero precedente scende perciò, come corollario, il teorema di Fubini ricordato nell'introduzione.

Storia della meccanica. — *Sulle origini della scienza dell'elasticità*. Nota del prof. G. Vacca, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Una delle idee più comuni e fondamentali nella meccanica moderna (1) è quella di *elasticità*. Questa idea astratta ha parole che la rappresentano in tutte le lingue viventi moderne (2); fa anzi parte della lingua comune, tanto che anche i bambini l'adoperano con perfetta familiarità.

(1) L'insufficienza della storia della meccanica, specialmente per quanto riguarda l'origine e l'evoluzione dei diversi concetti di questa scienza, è stata opportunamente rilevata in: Vito Volterra, *Lectures delivered at the Clark University* (*Trois leçons sur quelques progrès récents de la physique mathématique*), Worcester, Mass., 1909, pag. 28.

(2) In italiano francese ed inglese si adoperano la parola *elasticità* ed i suoi derivati, seguendo l'uso del primo inventore. I Tedeschi hanno introdotto le parole *Federkraft*, *Spannkraft*, *Schnellkraft*, e simili. La parola elasticità, bandita dal grande dizionario dei Grimm, ricompare però nelle necessarie spiegazioni di queste parole: secondo lo stesso dizionario, queste son tutte parole recenti, adoperate soltanto da Kant e da Goethe.

Nelle lingue orientali (giapponese, cinese, arabo) mancavano nella lingua classica parole corrispondenti alla nuova idea; nei dizionarî moderni del secolo XIX, in queste lingue, sono state a questo scopo introdotte nuove parole o circumlocuzioni imitate dalle lingue europee.

Pure, quest'idea mancò agli antichi, sebbene essi adoperassero archi e balliste; come pure mancò ai numerosi popoli nei primordî dell'incivilimento, anche a quelli che conobbero molte proprietà di corpi elastici sfuggite agli europei (1).

Gli antichi, infatti, avevano bensì distinto i corpi in molli e duri; avevano anche osservato che alcuni corpi, dopo esser stati deformati o comunque compressi, ritornano allo stato primitivo; ma non avevano saputo, o non interessava loro astrarre da questi fenomeni quella idea astratta che noi adoperiamo per descriverli, parlando cioè della loro *forza elastica*.

Nell'antichità classica, del resto, i corpi elastici non si presentavano spesso all'osservazione degli studiosi.

L'*arco* e la *lira* (2), per la molteplicità stessa delle loro parti, e delle operazioni necessarie ad adoperarli, distraevano dall'attenzione degli studiosi la considerazione di quella proprietà che appare a noi fondamentale nella loro costruzione.

Nelle opere meccaniche di Archimede i corpi sono considerati come perfettamente rigidi.

2. Verso la fine del secolo XIV si cominciarono a costruire in Europa e probabilmente a Firenze i primi orologi a molla (3).

Gli artefici di Norimberga svilupparono, perfezionarono forse, la costruzione di molle per orologi da tasca, e per i fucili a ruota. Queste molle (4) colpirono assai l'attenzione degli scrittori del Rinascimento. Annibal Caro (5), in

(1) Specialmente interessanti sono i popoli dell'Indocina i quali adoperano da molti secoli la *cerbottana* (franc. *sarbacane*, ingl. *sumpitan*), parola che noi abbiamo appreso dagli Arabi, e questi dai Persiani; ed inoltre l'acciarino pneumatico, col quale ancor oggi alcuni popoli semi-inciviliti dell'Asia orientale si procurano il fuoco.

(2) In un oscuro passo di Eraclito, indicatomi dal prof. Festa, si parla della *παλίντροπος ἁρμονίη . . . τόξου καὶ λύρης*.

(3) Ciò risulta ad esempio da un grazioso sonetto di Gaspare Visconti, da lui pubblicato nel 1493 in Milano in un volume di *Rithmi* (riprodotto in Phil. Argelati, *Bibliotheca Scriptorum Mediol.*,... praemittitur J. A. Saxii... *Historia* literario-typogr. mediolan.... Mediolan., 1745, tom. I, col. 360):

« Si fanno certi orologi piccioli e portativi (scrive il Visconti), che con poco di ar-
« tificio sempre lavorano, mostrando le ore, e molti corsi de' Pianeti, e le feste, sonando
« quando il tempo lo recerca, . . . ».

La descrizione di un orologio, piuttosto confusa, dovuto ad un artefice fiorentino Lorenzo Vulparia, si trova nella lettera dell'agosto 1484 di Angelo Poliziano a Fr. Casa (Politiani, *Opera*, tom. I, Lugduni, 1573, pag. 117).

(4) Girolamo Cardano, nelle sue opere *De rerum varietate* e *De Subtilitate* (ristampate in: Hieron. Cardani, *Opera*, Lugduni, 1663, tom. III, pag. 187, 363...) parla a lungo delle molle degli orologi (che chiama: *horologii mola*) e delle loro proprietà. È curiosa la ragione che egli dà dello *stancarsi* delle molle: « Mola semper fit debilior quia est « res inanimata, quae summum laborem patitur; animata enim cibo reficitur ».

(5) Ann. Caro, *Lettere*, ediz. dei classici ital., vol. 3°, Milano 1807, pag. 192. Nella sua *Apologia*, pubblicata a Parma nel 1558, il Caro pose nel frontespizio una molla d'archibugio a ruota col motto *vim vi*.

una sua lettera alla duchessa d'Urbino del 14 ottobre 1563, dà una descrizione complessa, ma precisa, che credo opportuno di riprodurre allo scopo di mostrare come, senza l'idea di elasticità, si possa, con lungo giro di frase, descrivere il modo d'agire delle molle:

« *La molla è un instrumento dell'arti meccaniche di molto potere e di meravigtioso effetto, essendo immobile per sè, ed avendo forza da muovere l'altre cose, e di regolare anche il moto conforme al celeste* [negli orologi]; *ed è tale, che quanto più si stringe, e si travaglia, tanto è di più forza, e di più virtù, e lasciandosi stare non opera* ».

Le molle di varie forme diventarono d'uso comune nel secolo XVI, e forse è in questo secolo soltanto che le molle, le spirali specialmente, cominciarono ad essere usate nei più svariati congegni, sebbene da un oscuro passo di Vitruvio si possa indurre che già i Greci le avessero conosciute (1).

Più recente ancora è l'introduzione, dall'America in Europa, della gomma elastica o caucciù.

3. Il primo corpo, nel quale fu riconosciuta la virtù elastica, fu l'aria. Converrà quindi ricordare rapidamente gli sforzi complessi e successivi di molti uomini, allo scopo di renderci conto delle sue proprietà e di descriverle.

Erone Alessandrino, accettando le idee dei più antichi filosofi greci i quali dimostravano che l'aria è un corpo (poichè, ad esempio, un otre chiuso, pieno d'aria, resiste, come se dentro vi fosse qualche cosa), paragona (2) l'aria all'arena delle spiaggie. L'aria, egli dice, consta di innumeri corpi (*σώματα*) che si toccano in qualche punto, come i grani d'arena, ma lasciano interposti dei vani vuoti (*κενὰ διαστήματα*), simili a quelli (pieni d'aria) che stanno interposti tra i grani dell'arena.

Nelle opere di Filone da Bisanzio (3) si trovano alcuni interessanti esperimenti sull'aria, che conviene descrivere:

A) un vaso vuoto a bocca stretta (come un'anfora egizia), immerso nell'acqua, colla bocca rivolta in basso, non si riempie d'acqua, finchè non si fora il fondo con un piccolo buco, e finchè da questo buco non è uscita l'aria contenuta nel vaso;

B) se un vaso di vetro, corneo, o di altra materia trasparente, della stessa forma del precedente, si immerge nell'acqua in modo che si riempia, e poi lo si solleva, colla bocca in basso, in modo che questa rimanga sempre immersa, il vaso rimane pieno d'acqua. Ma se si fa un foro piccolo quanto

(1) Vitruvii, *de architectura* libri X, ed. Rose, Lipsia, Teubner, 1889, pag. 241. Vitruvio parla delle *versationes anisocyclorum* degli *scorpioni*, una specie di strumento bellico per lanciar freccie. L'acuto veneziano Daniele Barbaro, nel suo commento a Vitruvio, suppose che *anisociclo* volesse indicare una molla a spirale.

(2) Heronis Alexandrini *opera*, vol. I, ed. Schmidt, Leipzig, Teubner, 1899; *Pneumatica*, pag. 6.

(3) ibid., pp. 460, 462, 476, 480.

si voglia, in alto, in modo che possa entrarvi l'aria, l'acqua nel vaso scende al livello di quella esterna;

C) se una candela, il cui piede è immerso nell'acqua, si ricopre con un vaso come il precedente, in modo che la bocca del vaso sia chiusa dall'acqua, dopo pochi momenti la candela consuma in parte l'aria del vaso, la candela si spegne, e l'acqua sale entro il vaso;

D) se un recipiente fatto ad imbuto rovesciato, avente la bocca chiusa da un fondo bucherellato, si immerge nell'acqua, lasciando aperto il piccolo orificio del collo, esso si riempie d'acqua. Ma, se dopo aver chiuso questo orificio con un dito, si estrae l'imbuto dall'acqua, il recipiente rimane pieno d'acqua; e l'acqua non esce dai fori del fondo, se non si dà adito superiormente all'aria sollevando il dito.

4. Questi esperimenti passarono inosservati per molti secoli finchè un vero precursore di Galileo, Giov. Battista della Porta (1), nel 1601, dopo aver diligentemente studiato le opinioni degli antichi, ebbe ripresa le ipotesi di Erone sulla costituzione intima dell'aria, paragonandola, oltrechè all'arena, alle spugne asciutte, o ai ritagli di corna, i quali, se non compressi, riprendono la loro forma e grandezza. Per dimostrare questa proprietà dell'aria egli procede ai seguenti esperimenti:

A) se in una palla di ferro vuota, nella quale è praticato un foro in cui è infilata una cannuccia di stagno, si soffia colla bocca, è possibile di comprimervi dentro altra aria;

B) è possibile, pure aspirando colla bocca, di estrarre da quella palla una certa quantità dell'aria in essa contenuta, senza che nessun'altra sostanza possa penetrarvi: quindi l'aria può esser compressa o dilatata per mezzo di una forza;

C) se in una canna da fucile si immette una bacchetta il cui estremo sia ben oliato in modo che l'aria non possa sfuggire: se si chiude col dito il piccolo buco inferiore (per cui si dà fuoco), in modo che l'aria non possa sfuggire, si proverà gran fatica a far penetrare la bacchetta nella canna, poichè l'aria vi si comprime; e se, quando non si può comprimere più oltre, si abbandona la bacchetta, questa, con grande forza e rumore, è gettata fuori;

D) se invece, aperto lo spiraglio inferiore, si spinge la bacchetta nel fondo del fucile, si chiude poi lo spiraglio, e si cerca di estrarre poi la bacchetta, in parte vi si riesce; ma quando, dopo grande sforzo, è estratta fuori per un certo tratto, se la si abbandona, torna dentro con impeto, e con strepito picchia nel fondo, perchè allora l'aria era estremamente rarefatta, e non permetteva una rarefazione maggiore.

L'operetta del Porta, tradotta nel 1606 in italiano e in spagnuolo, ebbe grande diffusione in Europa.

(1) Io. Bapt. Portae neapolitani *Pneumaticorum libri tres*, Neapoli, apud Carlinum, 1601.

Pochi anni dopo, Galileo faceva nuove ed importanti esperienze ed osservazioni.

Nei *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*, pubblicati nel 1638, osserva che la vescichetta che i pesci hanno in corpo, piena d'aria, permette ai pesci di equilibrarsi in acqua di diversa salsedine, e di diversa densità.

Nella stessa opera osserva, poi, che l'aria *patisce di essere assaissimo condensata*, e si riesce, dopo averla forzatamente messa in un fiasco, ad avere un'idea del rapporto tra il suo peso e quello dell'acqua.

Pure a Galileo si dovono i primi tentativi di costruire delle palline con cera e frammenti di piombo, di tale densità da poter rimanere ad una data profondità nell'acqua, senza però riuscirvi, ma dando però evidentemente origine a quel termometro a palline costruito nei primi mesi del 1648, inviato allora a Roma, e descritto poi per disteso nei *Saggi di naturali esperienze* dell'Accademia del Cimento (1).

È infine dovuta a Galileo la segnalazione della famosa osservazione che l'acqua non può essere estratta colle pompe aspiranti se non ad una limitata altezza.

È da questa osservazione di Galileo che il Torricelli fu tratto, nel 1643, alle sue celebri esperienze con una canna di vetro ripiena di mercurio, la quale lo convinse che era la pressione esterna dell'aria la sola causa della ascensione del mercurio nel barometro.

5. Nei primi mesi del 1648, ripetendosi a Parigi le esperienze del Torricelli, che in tutta Europa avevano destato grande ammirazione ed avevano dato luogo a discussioni in gran parte oziose, venne in mente al Roberval l'idea di porre una piccola vescica di pesce chiusa, nella sommità, alquanto allargata, di una canna di vetro. Riempita di mercurio la canna, e rovesciatala in un bagno di mercurio, questa vescica, rimasta nel vuoto barometrico, si gonfiava (come rettamente interpretarono il giovane Huygens, gli accademici fiorentini, e tutti gli spiriti lucidi che avevano ben capito i ragionamenti del Torricelli) per l'espansione di quella poca aria rimasta entro la vescica.

In quello stesso anno 1648, giunti a Roma i termometri a palline degli accademici del Cimento, due italiani poco noti oggi, ma entrambi ingegni acuti, costruirono, sembra indipendentemente l'un dall'altro, quello strumento che oggi a torto si chiama *diavolo di Cartesio*, ma che è assai atto a dimostrare, ad un tempo, la compressibilità dell'aria e la *resistenza certissima dell'acqua alla compressione*. È questo il titolo di un opuscolo pubblicato il 26 luglio 1648 da Raffaello Magiotti da Montevarchi,

(1) *Saggi di naturali esperienze*, pag. 15 dell'ediz. di Firenze del 1841: *quinto termometro*.

allievo, assieme col Torricelli, di Benedetto Castelli. In questo breve scritto il Magiotti parla della *forza* dell'aria compressa, e rileva come gli archibusi a vento (costruiti verso la metà del secolo XVI) la pongano in evidenza.

Il dotto medico Tommaso Cornelio da Cosenza, venuto a Roma, ed ivi allievo di Michelangelo Ricci, in una sua lettera, pure stampata a Roma nel 1648, intitolata *Epistola qua motuum illorum qui vulgo ob fugam vacui fieri dicuntur, vera causa per circumpulsionem ad mentem Platonis explicatur* », tenta di dar spiegazione della pressione atmosferica.

La spiegazione, del Cornelio, della pressione atmosferica (alla quale sola egli rettamente attribuisce, seguendo il Torricelli, l'ascesa del mercurio nel barometro, ed i moti delle palline di varia densità che salgono o scendono nell'acqua allorchè questa si comprime più o meno dall'esterno) consiste nella costituzione stessa dell'aria la quale è da lui paragonata non solo alle spugne, ma anche, e piuttosto alla lana.

6. Tre anni dopo, nel 1651, il medico Giovanni Pecquet, da Dieppe, pubblicava una sua *Dissertatio anatomica de circulatione sanguinis*. Questo scritto ha per scopo di rendersi conto, più esattamente di quanto prima Cesalpino e poi Harvey avessero detto, per qual ragione il sangue penetri nel cuore allorchè questo si dilata. La sola *gravità* dell'aria pareva insufficiente al Pecquet. Egli pertanto rassomigliava nuovamente l'aria ad un cumulo di spugne o, meglio, di lana, riempiente tutta la terra, più compressa in basso, e meno in alto, il quale cumulo, per la sua spontanea dilatazione che egli chiama *elatere* (1), comprime tutti i corpi in essa immersi. Egli è quindi il primo a parlare, più volte, di quella che egli chiama *virtù elastica*, *forza della virtù elastica* (*elasticae virtutis robur*), e, più semplicemente *forza elastica* (*vis elastica*) dell'aria.

La felice introduzione di questa nuova idea diede origine in tutta Europa, a nuove esperienze.

Gli accademici del Cimento, i quali malvolentieri accettavano l'introduzione di nuove parole, ma erano avidi di nuove idee, chiamarono (nei loro *Saggi di naturali esperienze*) *forza di molla* dell'aria questa nuova specie di forza immaginata dal Pecquet.

7. Ma è soprattutto a Roberto Boyle che si devono le più importanti ricerche sulla proprietà elastica dell'aria. Nei suoi *New experiments physico-mechanical touching the* SPRING OF THE AIR *and its effects* opera pubblicata ad Oxford nel 1660, ed ivi pure nello stesso anno tradotta in latino col titolo « *Nova experimenta... de vi aëris elastica*; *de elatere et gravi-*

(1) Dal greco (ἐλατήρ impulsore, agitatore). Il nome ἐλατήριον è quello di un purgante estratto da una zucca selvatica. Pure direttamente dalla parola ἐλαστής proviene il nostro *elastico*.

tate aëris ». si parla subito non solo dell'elasticità dell'aria, ma anche di *corpi elastici*. Le particelle singole dell'aria sono dal Boyle concepite come altrettante particelle elastiche, simili alle molle spirali od ai peli della lana.

Spinto quindi dal desiderio di conoscer meglio questa forza elastica inerente all'aria, è tratto a sperimentare e ad osservare quella che oggi noi chiamiamo, a buon dritto, legge di Boyle.

8. Comincia così lo studio delle proprietà elastiche dei gas che, pochi anni dopo (nel 1730), Daniele Bernoulli spiegherà con più feconda ipotesi. Comincia pure così con Boyle l'osservazione della elasticità dei corpi solidi. lo studio dei quali sorge con le prime considerazioni di calcolo infinitesimale, e, pur avendo i suoi primi inizî nello studio della resistenza delle travi iniziato da Galileo, trova il suo primo sviluppo nello studio della curva elastica iniziato da Giacomo Bernoulli e poi completato da Eulero.

9. Prima però di porre termine a queste considerazioni, converrà dire qualche cosa intorno ad Ottone Guericke, poichè a torto, mi sembra, il Mach vorrebbe attribuirgli il merito di aver osservato l'elasticità dell'aria (1).

Non ostante la strana ipotesi del Gerland (2), è pressochè certo che le esperienze del Guericke non risalgono, come egli stesso dice, e come dice il suo amico G. Scott (3), se non a qualche anno prima del 1654, anno nel quale egli faceva in Ratisbona i suoi vistosi *esperimenti magdeburgici*. Le idee del Guericke sono poco chiare. Egli pretende che l'aria, compressa in un vaso resistente di ferro, possa diventare un liquido simile all'acqua (4) pre-

(1) E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, 4ª ediz., Lipsia, Brockhaus 1911, pag. 123: « *Die von Guericke beobachtete Spannkraft der Luft wurde von Boyle und später von Mariotte genauer untersucht* ».

(2) E. Gerland, *Geschichter der Physik*, ...durchgesehen von Dr. H. v. Steinwehr, Munchen und Berlin, 1913, pagg. 486-487.

Il Gerland vorrebbe far risalire al periodo dal 1632 al 1638 le prime esperienze del Guericke! Prima di Torricelli e di tutti gli altri studiosi europei! Lo stesso Guericke che il Boyle chiama *generoso*, si sarebbe opposto ad un così evidente anacronismo.

Il Gerland, riferendosi ad un articolo di G. Berthold (Wiedemanns Ann., Bd. XX, Leipzig 1883, pag. 349), parla di una lettera del 1799 (20 floréal, an. VII), del matematico Cristiano Kramp, la quale dice che « *In Cölln selbst ist bereits... eine querickische Luft Pump, von ihm selbst gemacht und in Jahre 1641 dem Magistrate* von Cölln zum Präsent geschick... ». Questa macchina però, ora nè a Colonia, nè in nessun altro luogo si trova, e non si conosce nessun documento che ne parli. Ed è inoltre assai inverosimile che il Guericke facesse con gran pompa, come cosa nuova, l'esposizione della sua invenzione a Ratisbona nel 1654, se già tredici anni prima aveva regalato alla città di Colonia la sua macchina. Siccome però non c'è ragione di dubitare della buona fede del Kramp, l'ipotesi più verosimile è che qnesti abbia letto male e che, invece di 1641, fosse scritto, ad esempio, 1671.

(3) P. Gasparis Schotti S. T. *Mechanica hydraulico-pneumatica*, Francoforte 1657.

(4) Ottonis de Guericke *Experimenta... magdeburgica*, Amesterdam 1672; cfr. pagg. 72, 116, 118.

tende che il vuoto, che faceva colla sua pompa, fosse più perfetto del vuoto torricelliano, ecc.

Il merito del Guericke rimane soltanto quello, piuttosto meccanico, di aver costruito una prima macchina pneumatica. Questa macchina però, subito perfezionata dal Boyle, fu da questi adoperata con assai maggior sagacia ed intento scientifico. Nei suoi tentativi di spiegazione dei fenomeni, anche il Guericke parla dell'*elatere* dell'aria, la parola introdotta dal Pecquet e largamente usata dal Boyle: il che dimostra, come del resto egli afferma, che l'opera sua fu pensata e scritta nel 1663, sebbene sia stata pubblicata soltanto nel 1672.

Matematica. — *Sulla definizione di coppie, terne*, ecc. Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Nuove ricerche intorno all'azione degli ossidanti sui sali cerosi* (1). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

In alcune Note (2) precedenti ho studiato l'azione dell'acido nitrico sui sali cerosi. Le ricerche descritte in questa Nota riguardano l'ossidazione dei sali cerosi mediante il permanganato potassico e i persolfati.

Lo studio delle condizioni nelle quali il cerio passa da trivalente a tetravalente, sotto l'azione degli ossidanti, ha interesse, tanto per la preparazione dei sali cerici, quanto dal punto di vista analitico, perchè tutti i metodi di dosamento, di separazione e di purificazione del cerio si fondano sulla proprietà, che ha questo elemento, di dare composti del tipo RX_4, proprietà che lo distingue da tutti gli altri elementi del suo gruppo.

Le ricerche con l'acido nitrico ebbero, come corollario, la preparazione dei nuovi sali cerici: lo jodato, il selenito, l'arseniato monoacido e il biacido. Le ricerche col permanganato e coi persolfati, riferite in questa Nota, mi condussero a trovare nuovi metodi di dosamento e di separazione del cerio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale dell'Università di Ferrara.

(2) G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei 1907, I, 895—401—644, Berichte chem. Gesell. 43_{2214} (1910).

Azione del permanganato sui sali cerosi in soluzione acida.

È noto che il permanganato, in presenza di sostanze a reazione alcalina,

[HgO (1), ZnO (2), MgO (3), Na_2CO_3 (4) ecc.],

ossida i sali cerosi con separazione di idrato cerico e biossido idrato di manganese. Muthmann e Weiss (5) esprimono la reazione tra permanganato potassico e nitrato ceroso, in presenza di carbonato sodico con la seguente equazione:

$$3\,Ce(NO_3)_3 + K\,MnO_4 + 4\,Na_2CO_3 + 8\,H_2O = \\ = 3\,Ce(OH)_4 + Mn(OH)_4 + 8\,Na\,NO_3 + K\,NO_3 + 4\,CO_2\,.$$

Non si conoscono ricerche intorno all'azione del permanganato sui sali cerosi in soluzione acida.

Ossidazione del solfato ceroso.

Io ho osservato che se ad una soluzione di solfato ceroso, contenente non più dell'1 % di $Ce_2(SO_4)_3$ e non meno del 25 % di H_2SO_4, si aggiunge a poco a poco una soluzione di permanganato, il colore di questo ultimo scompare, e la soluzione cerosa assume il colore giallo delle soluzioni di solfato cerico. La reazione è un po' lenta a freddo, molto più rapida a caldo. Se la soluzione cerosa contiene più del 30 % di acido solforico, la reazione avviene rapidamente anche a freddo.

Tutto l'ossigeno attivo del permanganato passa nel sale cerico. Infatti, se si determina la quantità di acqua ossigenata necessaria per ridurre il sale cerico formatosi, si trova che essa è identica a quella che sarebbe stata necessaria per ridurre il permanganato adoperato nell'ossidazione.

Siccome non si ha separazione di biossido di manganese, bisogna ammettere che il permanganato si riduca a sale manganoso, ossia che per ogni molecola di permanganato vengano ossidati cinque atomi di cerio. Aggiungendo, infatti, ad una soluzione di solfato ceroso, col 40 % di acido solforico, il permanganato, in ragione di una molecola di permanganato per cinque atomi di cerio, la soluzione diventa gialla; ma se si continua ad aggiungere permanganato, essa diventa rosso-bruna e infine violetta, ciò

(1) Winkler, Journal prakt. Chem. 95_{410} (1865).

(2) Stolba, Jahresbericht. 1878_{1059}; Muthmann e Rolig, Berichte deutsch. chem. Ges. 31_{1718} (1898).

(3) R. I. Meyer e Schweitzer, Z anorg. Chem. 54_{104} (1907).

(4) Drossbech, Berichte deutsch. chem. Ges. 29_{2452} (1896).

(5) Lieb. Ann. 331_1 (1904).

che prova come il permanganato, aggiunto in più, rimanga inalterato. La reazione tra $KMnO_4$ e $Ce_2(SO_4)_3$ in presenza di molto acido solforico avviene dunque secondo l'equazione

$$5\,Ce_2(SO_4)_3 + 2\,KMnO_4 + 8\,H_2SO_4 = \\ = 10\,Ce(SO_4)_2 + K_2SO_4 + 2\,MnSO_4 + 8\,H_2O\,.$$

Da quanto precede risulta la possibilità di titolare direttamente con permanganato i sali cerosi anche in presenza di altri elementi delle terre rare, i quali, avendo una sola forma di combinazione, non vengono influenzati dagli ossidanti. La determinazione dei sali cerosi mediante il permanganato ricorda quella dei sali ferrosi. L'unica differenza consiste in questo: che, mentre il solfato ferrico, in presenza di molto acido solforico, dà soluzioni quasi incolori, il solfato cerico invece è giallo e maschera un poco di colore del permanganato, di modo che la fine della reazione si manifesta con un passaggio dal giallo all'aranciato-bruno che non è facile a cogliere. Si vedrà, più avanti, come questa difficoltà sia stata superata, sostituendo all'acido solforico l'acido fosforico.

Ossidazione dello jodato ceroso.

Lo jodato ceroso $Ce(JO_3)_3$, che si può ottenere, come è noto, aggiungendo acido jodico alla soluzione di un sale ceroso, è un precipitato bianco solubile in acido nitrico diluito; mentre lo jodato cerico $Ce(JO_3)_4$, che io ottenni, per la prima volta, trattando lo jodato ceroso con acido nitrico all'ebullizione, è giallo cristallino, ed insolubile anche in acido nitrico abbastanza concentrato se è presente acido jodico libero.

Ora io ho osservato che, in una soluzione cerosa che sia stata addizionata con acido jodico in eccesso, e poi coll'acido nitrico necessario per disciogliere il precipitato di jodato ceroso, si può, mediante il permanganato, ossidare rapidamente tutto il cerio contenuto, e precipitarlo quantitativamente sotto forma di jodato cerico.

Ciò risulta, ad esempio, dalla seguente esperienza: Ad una soluzione cerosa (50 cc.), contenente gr. 0,2997 di $Ce(NO_3)_3$, vennero aggiunti 20 cc. di una soluzione di acido jodico al 10 %, e 15 cc. di acido nitrico concentrato; poi, dopo avere scaldato a bagno maria, 10 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di permanganato. Il colore di quest'ultimo scomparve rapidamente, e si formò un precipitato cristallino giallo che si depositò in fondo al recipiente, lasciando del tutto incolore il liquido soprastante. Questo liquido, separato per filtrazione, all'analisi mostrò di non contenere cerio. Nel precipitato, lavato con una soluzione contenente acido nitrico (10 %) e acido jodico (5 %) e poi con acqua, si dosò cerio e acido jodico. Esso conteneva gr. 0,1578 di

CeO_2 (calcolato gr. 0,1583) e gr. 0,4660 di jodio come acido jodico. Da questi risultati si calcola, per il rapporto $\frac{Ce}{J}$, il valore $\frac{1}{4.01}$. Dunque il precipitato è effettivamente jodato cerico e contiene tutto il cerio adoperato. La reazione tra $Ce(JO_3)_3$ e $KMnO_4$ viene espressa dalla seguente equazione:

$$5\,Ce(JO_3)_3 + KMnO_4 + 5\,HJO_3 + 3\,HNO_3 = \\ = 5\,Ce(JO_3)_4 + KNO_3 + Mn(NO_3)_2 + 4\,H_2O.$$

Questa reazione non può servire per la titolazione volumetrica del cerio, perchè, dopo che tutto il cerio è stato ossidato, il permanganato viene ancora ridotto, benchè più lentamente, dal sale manganoso che si è formato in soluzione e che, in presenza dell'eccesso di acido jodico, dal permanganato viene ossidato a jodato manganico.

L'ossidazione dello jodato ceroso permette, invece, di separare quantitativamente il cerio dagli altri elementi del suo gruppo che dànno jodati solubili in acido nitrico diluito e hanno una sola forma di combinazione.

Ad esempio, si separò il cerio dal lantanio in una soluzione contenente gr. 0,2997 di $Ce(NO_3)_3$ e gr. 0,3521 di $La(NO_3)_3$, trattandola con acido jodico e con permanganato come fu detto sopra. Si ottennero gr. 0,1570 di CeO_2 (calcolato gr. 0,1583) e gr. 0,1752 di La_2O_3 (calcolato gr. 0,1766).

Non si conosceva finora nessuna reazione che permettesse la separazione quantitativa del cerio dagli elementi trivalenti delle terre rare, mediante un solo trattamento.

Ossidazione del fosfato ceroso.

È noto che l'acido fosforico produce, nelle soluzioni dei sali cerosi, un precipitato bianco di fosfato ceroso solubile negli acidi diluiti e anche in un eccesso di acido fosforico, mentre nelle soluzioni dei sali cerici produce un precipitato pure bianco che, negli acidi diluiti, è quasi insolubile e che, fino ad ora, non è stato studiato.

Facendo agire il permanganato sul fosfato ceroso, sciolto in un eccesso di acido fosforico, ho constatato che il permanganato viene ridotto anche a freddo, mentre la soluzione intorbida per la formazione di un precipitato bianco, voluminoso e gelatinoso. Questo precipitato dà le reazioni dei sali cerici. In acido cloridrico concentrato si scioglie con colorazione rossa che poi scompare mentre si libera cloro, e in una soluzione concentrata di acido ossalico si scioglie con colorazione rossa che poi scompare mentre precipita ossalato ceroso. Ho determinato in detto precipitato il rapporto $\frac{Ce}{O\ attivo}$ per stabilire se il cerio che esso contiene è tutto cerico. Una porzione della sostanza venne introdotta in una soluzione di joduro potassico e acido cloridrico:

si ebbe tosto liberazione di jodio che venne titolato con iposolfito; poi nel liquido stesso si precipitò il cerio come ossalato. Per gr. 0,4179 di jodio si trovarono gr. 0,5584 di CeO_2. In base a questi risultati si calcola che per ogni atomo di cerio si è liberato un atomo di jodio.

Dunque nel composto, che si ottiene ossidando con permanganato, il fosfato ceroso, è contenuto un atomo di ossigeno attivo per ogni due atomi di cerio: ossia tutto il cerio è nella forma tetravalente.

In detto composto venne anche determinato il rapporto $\frac{Ce}{P_2O_5}$. Per quattro atomi di cerio si trovarono circa tre molecole di anidride fosforica. Si tratta dunque di un sale basico. I tentativi fatti per ottenere il fosfato cerico neutro e allo stato cristallino non diedero alcun risultato.

Se l'ossidazione del fosfato ceroso, mediante il permanganato, non ha interesse per la preparazione dei sali cerici, ne ha invece uno notevole, dal punto di vista analitico, perchè tale ossidazione è, in condizioni opportune, quantitativa; e siccome il precipitato che si forma è bianco, ed il liquido sovrastante resta incoloro, la fine della reazione viene indicata con grande esattezza dall'apparire della colorazione violetta del permanganato. In presenza di acido fosforico, si può, dunque, titolare direttamente un sale ceroso col permanganato, senza l'inconveniente che abbiamo notato in soluzione solforica.

Questo nuovo metodo di determinazione volumetrica del cerio dà risultati esatti se si opera nelle condizioni seguenti. La soluzione cerosa deve essere diluita in modo che non contenga, in 100 cc., più di 0,1 di cerio. A 100 cc. della soluzione si aggiungono 20 cc. di una soluzione di acido fosforico di densità 1,35; poi a goccia, a goccia, la soluzione $\frac{n}{10}$ di permanganato, finchè il precipitato che si forma non appare un poco roseo. Allora si scalda a bagno maria; a caldo, il lieve colore roseo scompare, e si continua l'aggiunta del permanganato finchè il liquido soprastante al precipitato assume una tinta rosea persistente a caldo.

Il dosamento dà risultati buoni anche se il cerio è accompagnato da altri elementi delle terre rare. La quantità dell'acido fosforico aggiunto deve essere tale da mantenere in soluzione detti elementi, anche a caldo. Se è presente torio, l'acido fosforico produce un precipitato di fosfato basico di torio, che, come il fosfato cerico, è assai poco solubile negli acidi. La presenza di tale precipitato non disturba l'ossidazione del fosfato ceroso. Infine, anche la presenza di piccole quantità di sali manganosi non ha influenza sulla titolazione, mentre tutti i metodi volumetrici finora noti non sono applicabili se il cerio è accompagnato dal manganese.

Mi riserbo di dimostrare altrove, con dati analitici, come la titolazione del cerio, in soluzione fosforica col permanganato, sia, di tutti i metodi di

dosamento del cerio finora proposti, uno dei più esatti, il più rapido e quello che può essere di impiego più generale.

Azione dei persolfati sui sali cerosi in presenza di un sale di argento.

Dalle ricerche di von Knorre (1), di O. Witt (2) e di R. J. Meyer (3) risulta che i persolfati ossidano, *a caldo*, i sali cerosi. *A freddo*, persolfato e sale ceroso possono coesistere in soluzione per molto tempo senza reagire.

Io ho osservato che, se ad una soluzione contenente un persolfato alcalino e nitrato o solfato ceroso, si aggiunge un po' di nitrato di argento, subito comincia l'ossidazione del sale ceroso per opera del persolfato, e prosegue più o meno rapidamente a seconda della concentrazione di detti composti e, dopo un tempo più o meno lungo, se il persolfato era in quantità sufficiente, tutto il cerio contenuto è passato nella forma cerica. Se la soluzione cerosa è discretamente acida, il sale cerico che si forma vi rimane sciolto e la colora in giallo; se la soluzione è neutra, intorbida rapidamente perchè il cerio tetravalente precipita allo stato di sale basico.

Si può a questa reazione dare una forma più appariscente, operando nel modo che segue. A una soluzione di nitrato ceroso, per esempio al 5 %, si aggiunge tanto acido fosforico da sciogliere il precipitato prima formatosi; poi una soluzione di persolfato di ammonio, abbastanza concentrata.

Si divide in due porzioni il liquido, e in una si fanno cadere alcune goccie di una soluzione di nitrato di argento al 10 %. Dopo alcuni minuti il liquido, nel quale si è aggiunto il nitrato di argento, si è trasformato in una massa bianca gelatinosa e coerente, costituita da quel fosfato cerico di cui si è parlato più sopra. La porzione del liquido senza il nitrato d'argento rimane limpida.

Il meccanismo chimico di questa reazione catalitica è molto chiaro, perchè si sa che il persolfato ossida, a freddo, l'argento monovalente, ad argento bivalente; e questo ossida, pure a freddo, il cerio trivalente, a cerio tetravalente.

Ho eseguito alcune ricerche alla scopo di applicare questa catalisi alla purificazione dei sali di cerio.

Se ad una soluzione diluita e neutra di nitrato ceroso, per esempio al 2 %, si aggiunge una soluzione di persolfato potassico contenente circa il doppio della quantità di $K_2S_2O_8$ necessaria per ossidare il cerio impiegato,

(1) Z. angew. Chem. 1897_{717}.
(2) Berichte deutsch. chem. Ges. 33_{1315} (1900).
(3) ibid, 33_{3003} (1900).

e infine nitrato d'argento in ragione di gr. 0,5 per litro, si osserva che, dopo 24 ore, circa il 95 % del cerio messo a reagire è precipitato come solfato basico. Questo si presenta sotto forma di una polvere gialla cristallina che si può facilmente separare e lavare per filtrazione alla pompa.

Se altri elementi delle terre rare accompagnano il cerio, essi rimangono in soluzione insieme con la piccola quantità di sale cerico che è mantenuta sciolta dall'acido solforico liberatosi dal persolfato.

L'ossidazione del nitrato ceroso con persolfato in presenza di nitrato d'argento permette dunque di ottenere in modo molto semplice, a freddo e con buon rendimento, da un prodotto di cerio greggio, un sale di cerio puro.

Chimica. — *Prove di scissione di alcooli racemici mediante l'anidride canforica* (1). Nota di L. Mascarelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

La scissione, per via puramente chimica, delle sostanze racemiche nei loro antipodi ottici, riesce abbastanza facilmente in tutti i casi in cui le sostanze hanno una funzione chimica ben spiccata, come quella acida o quella basica; meno agevole riesce per le sostanze a funzione aldeidica e chetonica; meno ancora per quelle a funzione alcoolica; difficile assai, o quasi impossibile, per gli idrocarburi e pei loro derivati alogenati.

Per gli alcooli sono stati già proposti varî metodi, alcuni dei quali di applicazione generale. Tra questi il più semplice, almeno per quanto riguarda il principio su cui si fonda, è quello di Pickard ed allievi (2). L'esecuzione di analogo principio venne già tentata da Krüger (3) e da Meth (4); però l applicazione pratica e semplice venne data ed estesa dal Pickard. Il metodo consiste nel preparare anzitutto il monoetere di un acido polibasico, ciò che si ottiene scaldando l'alcool con l'anidride dell'acido; poi nel salificare questo etere acido con una base attiva, e così è resa possibile la separazione col metodo di Pasteur; finalmente nell'idrolizzare con potassa alcoolica l'etere acido attivo, ottenuto per tal modo allo stato puro.

Gli autori adoperano con successo l'anidride succinica, ma più specialmente la ftalica: nella applicazione ripetuta del metodo a varî alcooli racemici, si poterono meglio stabilire le condizioni più favorevoli in cui si deve

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica della R. Università di Cagliari.

(2) Journ. chem. Soc. London, *91*, 1974 (1907) e numerose Note posteriori.

(3) Ber. d. chem. Ges. *26*, 1203 (1893).

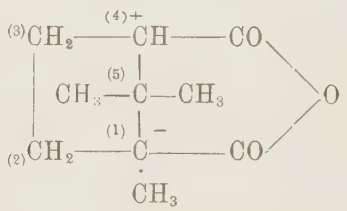
(4) Ber. d. chem. Ges. *40*, 695 (1907).

operare (1). Ciò nullameno, il metodo, che ha già dato buoni risultati, offre difficoltà dipendenti specialmente dal fatto che i sali alcaloidici del monoetere ftalico (ed ancor più quelli del succinico) (2) cristallizzano stentatamente, più spesso si depositano oleosi e ritardano a lungo a solidificare.

Noi abbiamo provato ad applicare tale metodo per la scissione del decaidro-β-naftolo, che, come abbiamo dimostrato (3), deve esistere in forme otticamente attive; ma, purtroppo, finora non siamo riusciti a farne cristallizzare il sale di brucina, il quale dall'acetone si deposita come una pellicola oleosa, da l'etere di petrolio come gocciole oleose gialle che col tempo solidificano, ma che non dànno affidamento di sufficiente purezza.

Abbiamo perciò voluto provare a sostituire alla anidride ftalica un'altra anidride, la quale, da quanto poteva prevedersi teoricamente, avrebbe anche semplificato il processo od almeno poteva renderlo più breve. permettendo cioè di tralasciare la salificazione con basi attive.

L'anidride canforica infatti, contenendo nella sua molecola due atomi di carbonio asimmetrici, fra loro diversi e di configurazione opposta, doveva già rendere possibile la separazione, secondo il processo Pasteur. del suo monoetere. Aschan (4) ha dimostrato che, conformemente alla teoria, possono esistere sei acidi canforici $C_{10}H_{16}O_4$ appartenenti a due serie: la serie dell'acido canforico è del tipo malenoide, e di questo esistono l'acido canforico destro, quello sinistro, ed il racemico; la serie dell'acido isocanforico è del tipo fumaroide, e di questa si conoscono pure l'acido isocanforico destro, il sinistro, ed il racemico. Siccome l'anidride canforica ordinaria genera, per idratazione, acido canforico del tipo malenoide, così la sua costituzione deve essere la seguente:



nella quale facilmente si nota che, se l'atomo di carbonio 4 ha configurazione destra, quello 1 deve averla sinistra; e viceversa. È evidente che, se

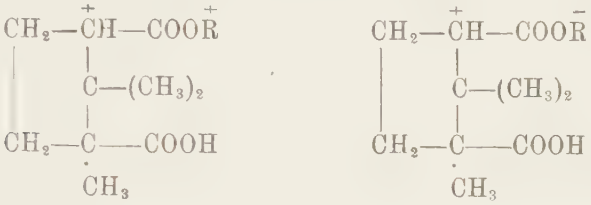
(1) Vedi anche Paolini, Rend. R. Acc. Lincei. I, 769 (1911); II, 173 (1914).

(2) Journ. chem. Soc. London, *99*, I, 59 (1911).

(3) L. Mascarelli, Rend. R. Acc. Lincei, *20*, II, 223 (1911); Gazz. ch. it. *42*, II. 12 (1912).

(4) Ber. d. d. chem. Ges. *27*, 2001 (1894); Liebigs Ann. *316*, 196 (1901).

si compie l'eterificazione parziale di questa anidride con un alcool racemico, si formeranno contemporaneamente i due monoeteri



che corrispondono agli α-eteri di Anschütz (1) od agli orto-eteri di Brühl (2). Da questi schemi risulta subito che i due eteri più non sono enantiomorfi, e perciò ne è possibile lo sdoppiamento per cristallizzazione.

È interessante di far notare, al riguardo, come il contegno della anidride canforica nell'eterificazione — che ha dato luogo a numerosi studî di Friedel, Brühl, Anschütz, Wegscheider, V. Meyer ed altri, ed anche a polemiche sulla costituzione dell'acido canforico — parrebbe *a priori* favorire questo processo di eterificazione: poichè oramai si sa che gli eteri α (cioè del carbossile legato al carbonio 4) sono quelli che hanno la massima tendenza a formarsi, mentre gli eteri β (del carbossile legato al carbonio 1) non si formano affatto per riscaldamento dell'alcool con l'anidride canforica (3). E così pure esso parrebbe favorevole alla ulteriore esecuzione del processo, perchè dei due monoeteri, quello che con tutta facilità si saponifica per azione degli alcali è precisamente l'α, mentre il β richiede una ebollizione assai prolungata, ciò che favorisce in tali casi la racemizzazione del prodotto che si vuole isolare (4). Tale contegno degli eteri dell'acido canforico nella saponificazione era già stato notato per primo da Friedel (5), poi da Brühl (6) e Wegscheider (7), e conferma la regola di V. Meyer circa la saponificazione di eteri di acidi polibasici (8): che, cioè, *gli eteri che facilmente si formano, facilmente si saponificano; e viceversa.*

L'impiego dell'anidride canforica poteva ancora offrire il vantaggio che la velocità di reazione nell'eterificazione di un acido attivo con un alcool racemico doveva essere, per i due componenti di tale racemo, alquanto diversa,

(1) Ber. d. d. ch. Ges. *30*, 2652 (1897).

(2) Ber. d. d. chem. Ges. *25*, 1796 (1892).

(3) Brühl, Ber. d. d. Chem. Ges. *26*, 284, 337, 1097 (1893); Anschütz, Ber. d. d. ch. Ges. *30*, 2652 (1897); ed altri.

(4) Journ. Ch. Soc. London, *107*, 702, 888 (1915).

(5) Compt. rend. *113*, 825 (1891).

(6) Ber. d. d. ch. Ges. *25*, 1796 (1892); *26*, 284 (1893).

(7) Ber. d. d. Ch. Ges. *28*, 1469 (1895).

(8) Ber. d. d. ch. Ges. *28*, 1263 (1895).

conformemente alla dimostrazione fatta da Markwald e Mc. Kenzie [1] che di questa diversa velocità di eterificazione si servirono per scindere alcuni composti racemici.

Sfortunatamente, parecchie difficoltà sperimentali e alcune reazioni secondarie perturbatrici si accumulano per togliere ogni valore pratico al metodo. Questo è il risultato di numerose prove tentate, le quali, se tolgono valore all'applicazione sperimentale, confermano il principio teorico, perchè ci hanno dato non dubbî segni dell'avvenuta scissione parziale.

Saggi preliminari, compiuti con poco deca-idro-β-naftolo sintetico e anidride canforica, ci fecero sorgere il sospetto che la eterificazione avvenisse in modo anormale, con produzione di prodotti secondarî, che ci riserviamo di studiare più tardi.

Questo ci indusse ad applicare il metodo ad alcooli racemici più facili ad aversi in buona quantità e che già fossero stati scissi nelle loro forme antipode, per modo che più facile ci riuscisse il controllo del metodo stesso.

Noi abbiamo scelto l'etil-fenil-carbinolo ed il metil-fenil-carbinolo. Le esperienze vennero compiute in collaborazione con la laureanda sign.ina Daria Deliperi; di queste esponiamo, qui, solo i risultati. Esse ci hanno dimostrato che:

Il solito processo di eterificazione con acido cloridrico gassoso, applicato allo scopo di conoscere le proprietà degli eteri, si mostrò inadatto, perchè praticamente tutto il carbinolo si trasforma in cloro-derivato $C_6H_5 . CHCl . CH_2CH_3$ per la sostituzione del cloro all'ossidrile [2].

Il metodo di eterificazione con acido solforico dà rendimento scarsissimo, perchè questo acido agisce anzitutto da disidratante sul carbinolo, producendo propenil-benzolo $C_6H_5CH : CH \cdot CH_3$; e poi da polimerizzante, trasformando questo in polimeri bollenti alto.

Anche l'eterificazione tra canforato d'argento e cloro-propil-benzolo ci diede scarso rendimento.

Con tali prove però potemmo conoscere le proprietà di questi canforati acidi, che sono olii densi, non capaci di distillare senza decomporsi, e, perciò, di purificazione assai difficile.

La fusione ed il riscaldamento diretto dell'anidride canforica con l'etil-fenil-carbinolo ci diedero anche prodotti secondarî assieme con poco monoetere; però l'esame ottico dell'etil-fenil-carbinolo, che non ha reagito, ci mostrò che questo è lievemente destrogiro, ciò che attesta che, sebbene in piccolissima misura, la scissione si compie per la diversa velocità di eterificazione dell'acido canforico con le due forme antipode dell'alcool.

(1) Ber. d. d. ch. Ges. *32*, 2130 (1899).
(2) Errera, Gazz. ch. it. *16*, 322 (1886).

Vogliamo notare che le ricerche nostre erano già a tal punto quando ci accadde di trovare una Nota preliminare di R. Pickard, Lewcock e Yates (1), di cui non è fatto cenno nel Centralblatt, e nella quale gli autori, dopo essersi occupati della scissione di alcooli racemici della serie idroaromatica e terpenica, aggiungono:

« The application of these methods [cioè preparazione di ftalati e succinati acidi dell'alcool] to the isolation in a pure state of the tertiary alcohols has been hindered by the difficulty of preparing their acid esters. The interaction at (say) 110° or above of equivalent amounts of such alcohols and acid anhydrides (phthalic, succinic or camphoric) leads to the dehydration of the alcohols. It has, however, now been found that the long-continued action at temperatures below 100° of the anhydrides on an excess of the alcohols gives good yields of the desired acid esters. In this manner optically inactive terpineol has been converted into its esters ... ».

Non ci fu possibile di rintracciare altra pubblicazione degli stessi autori, in cui fossero descritti i particolari.

Per questo fatto, e perchè non ci pare che il processo con la anidride canforica possa sempilicare sperimentalmente il metodo con l'anidride ftalica, proposto da Pickard, ci siamo limitati ad accennare ai risultati delle esperienze intraprese. Pubblicheremo in altro luogo i particolari.

Con ogni verosimiglianza il processo alla anidride canforica potrà dare risultati soddisfacenti quando trattisi di alcoli racemici primarî, capaci di formare canforati cristallizzabili.

Ringrazio sentitamente la signorina Daria Deliperi per l'opera sua prestata in queste ricerche.

(1) Proceedings of the chemical Society, London, 1913, pag. 127.

Biologia. — *Influenza della temperatura sull'azione della tiroide sui girini*[1]. Nota di Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

In precedenti esperimenti sull'azione della tiroide di mammiferi sui girini di *Rana esculenta* e di *Bufo vulgaris*, ebbi modo di osservare che sul *Bufo vulgaris* essa era assai meno intensa. Continuando però a lavorare su larve di Bufo sviluppatesi da uova deposte più tardi, osservai che l'azione della tiroide si manifestava più rapidamente e più intensamente: così che nel 1° lavoro pubblicato nel 1913, io dissi che la tiroide dei mammiferi agiva stimolando la fase di metamorfosi tanto nelle Rane come nei Bufi; non v'era quindi un'azione differente per le differenti specie. Più tardi, nel 1914, leggendo il 2° lavoro di Gudernatsch, notai che l'autore ricordava l'azione meno rapida della tiroide sui Bufi. Era però evidente per me che avevo seguìto gli esperimenti sia durante mesi in cui la temperatura era bassa sia su larve tardive, quando la temperatura andava elevandosi, che la differenza dei risultati era dovuta alle condizioni sperimentali: e dalle osservazioni comparative io fui indotto naturalmente a pensare al fattore temperatura e a valermi dell'esperimento diretto per accertare la verità della mia induzione.

Ho voluto pertanto valermi per i miei esperimenti di larve di *Rana esculenta* approfittando della circostanza di avere ottenuto, in quest'anno, larve ibernanti in gran numero. In tal maniera mi si dava contemporaneamente il modo di studiare sperimentalmente un problema biologico molto interessante: quello dell'*ibernazione*; e inoltre, allo scopo di risparmiare esperimenti, mi si dava il modo di trattare anche un altro problema (2): verificare, cioè, se la tiroide dei varî vertebrati si comportasse ugualmente; perciò io ho esperimentato con tiroide di uccelli (di preferenza polli).

10 novembre 1915. — I varî lotti di larve, sulle quali ho esperimentato differenti nutrizioni (crostacei, molluschi, carne di bue, tuorlo d'uovo, albumina di uovo ecc.), si possono considerare come in via d'ibernazione; giacchè non s'iniziano più fasi di metamorfosi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Ricordo a tal proposito che il prof. Giacomini ha già pubblicato che la tiroide della *Rana esculenta* produce la metamorfosi se data come nutrimento alle larve della stessa specie: Giacomini E. Società Medica Chirurgica di Bologna. Adunanza del 3 dicembre 1914.

Mi valgo di una larva di *Rana esculenta* giunta al termine della fase di accrescimento larvale, con gli arti posteriori completamente sviluppati e differenziati, proveniente da un lotto nutrito con *Squilla mantis* (nutrizione che mi si è dimostrata favorevole all'accrescimento larvale); e di un'altra larva della stessa età, nutrita con gasteropodi (*Helix*) (nutrizione questa che mi si è dimostrata invece assai poco favorevole all'accrescimento e a produrre la fase di metamorfosi: la larva si presenta infatti assai indietro nello sviluppo; piccola, e con gli arti posteriori appena accennati). Alle due larve, tenute alla temperatura della stanza, somministro tiroide di pollo dal giorno 10 novembre: osservo che la tiroide viene mangiata, e me ne accerto constatando la presenza delle fecce.

12 novembre. — Inizio l'esperimento di controllo. Per poter verificare l'andamento sperimentale, mi servo di una larva di *Rana esculenta* la quale, sebbene sia stata nutrita con *Squilla*, tuttavia presenta l'abbozzo degli arti posteriori di qualche millimetro soltanto (variazioni individuali); la larva vien messa in una vaschetta, tenuta in stufa alla temperatura di 25°-27°, e le viene somministrata tiroide di pollo (1).

Questa larva, nutrita a caldo, si mostra dopo pochi giorni già avanti nello sviluppo: il 22 novembre, giorno in cui questa larva muore (essendo stata colpita per errore con un taglio di forbici nel tagliuzzare la tiroide), essa presenta l'apparato digerente in gran parte trasformato e gli arti posteriori notevolmente differenziati, per quanto non corrispondenti allo stato dell'apparato digerente (Cotronei, *Disarmonia prodotta dalla nutrizione con tiroide*).

22 novembre. — I controlli, tenuti a temperatura più bassa (quella della stanza), non mostrano modificazioni apprezzabili, per quanto abbiano continuato a mangiare tiroide: nemmeno la larva che era molto avanti nello sviluppo riesce ad emettere gli arti anteriori.

24 novembre. — Siccome l'esperimento a caldo, per quanto mostri già l'influenza della temperatura, non è completo, lo ripeto con un'altra larva dello stesso lotto della precedente (nutrita da prima con *Squilla*). È presso a poco nelle stesse condizioni di sviluppo; soltanto ha gli arti posteriori un po' più avanti. Le somministro da questo giorno tiroide di pollo.

5 dicembre. — La larva che è stata tenuta in stufa alla temperatura di 25°-27°, viene trovata morta: ma ha emesso l'arto anteriore sinistro; l'apparato digerente si mostra molto progredito nelle sue trasformazioni; anche gli arti posteriori si presentano notevolmente differenziati, ma non completamente; la coda mostra una condizione di atrofia, ma non di assorbimento.

(1) Il riscaldamento dell'animale sia graduale. Avverto pure che 27° è un massimo non la media dei miei esperimenti.

I controlli, tenuti a temperatura più bassa, non mostrano di essersi modificati, tranne l'abbozzo più evidente degli arti posteriori nella larva più piccola.

25 dicembre. — La larva più piccola, tenuta a freddo, muore; presenta ora gli arti posteriori con l'abbozzo del piede; non ha emesso arti anteriori: le condizioni dell apparato digerente sono evidentemente più arretrate che non nelle larve tenute a caldo. Osservo tuttavia che i controlli nelle stesse condizioni di temperatura (a freddo), ai quali ho continuato a somministrare *Helix*, sono ancora più arretrati.

L'altra larva tenuta a freddo, ma che all'inizio dell'esperimento già era molto sviluppata, tanto che pareva pronta alla metamorfosi, non ha emesso gli arti anteriori nemmeno al momento in cui scrivo (31 dicembre). Da parecchi giorni noto che non ha più mangiato, per evidente influenza del freddo.

Da questi esperimenti risulta in modo evidente:

1°) la tiroide degli uccelli agisce come la tiroide dei mammiferi nell'accelerare lo sviluppo larvale, producendo la metamorfosi;

2°) questa stessa azione si manifesta quindi anche nel produrre una azione disarmonica [1].

3°) la temperatura elevata, compatibile con la vita delle larve, favorisce, accelerandola, l'azione della tiroide, mentre le basse temperature hanno un'azione contraria: ciò spiega perchè in pieno estate gli esperimenti con larve di *Rana esculenta* sono più evidenti e più rapidi di quelli fatti con larve di *Bufo vulgaris*, le cui uova vengono di solito deposte qui a Roma in inverno;

4°) tutto m'induce a pensare che le larve ibernanti (quelle sulle quali non ho esperimentato con tiroide) non entrano in fase di metamorfosi perchè il secreto tiroideo, trattandosi di animali a sangue freddo, si trova in condizione da non poter più attivare il metabolismo organico per condizioni di temperatura; per lo meno l'influenza della tiroide dell'animale ha in questi casi un'importanza preponderante. Gli esperimenti con larve ibernanti tuttavia continuano.

Questi esperimenti sopra riassunti erano già stati compiuti (come dimostra il diario) e i risultati già ottenuti, quando mi giunge proprio in questi giorni, mentre scrivo la presente Nota, il fascicolo n. 6 del « Journal of experimental medicine » edito a New-Jork con data 1° dicembre 1915. Tale fascicolo contiene un lavoro del Lenhart; ed in un breve paragrafo si descrive

[1] Fa d'uopo tener presente che negli esperimenti da me eseguiti si è somministrata tiroide in eccesso: la disarmonia da me descritta va riferita sempre in relazione di questa circostanza: ulteriori esperimenti diranno i risultati di modificate condizioni sperimentali: risultati che solo per eccesso di prudenza non formulo.

l'influenza inibitrice del freddo sull'azione della tiroide. Questo risultato concorda con quelli da me indipendentemente raggiunti e sopra riferiti: l'autore, invece di valersi di larve ibernanti, ha operato nella stagione calda e ha esperimentato su larve tenute sperimentalmente a più bassa temperatura, in un refrigerante.

Citando il lavoro del Lenhart, io noto con sorpresa che l'autore non conosce i miei precedenti lavori sull'argomento (1), recensionati in molti periodici, anche stranieri, e già entrati nella letteratura scientifica sull'argomento; e la mia sorpresa è tanto più legittima, in quanto l'autore avrebbe trovato nei miei lavori (1913 e 1914) idee che collimano appunto con le sue.

Il Lenhart asserisce che i risultati che la tiroide manifesta sulle larve di Anuri non devono essere considerati come una « neuw action of thyroid but in its application to a living organism at a specific time in its development »; riferisce poi i risultati a un effetto sul metabolismo generale.

Che cosa mi sono proposto io? Nel 1913 ho appunto tracciato le varie ipotesi di lavoro, asserendo che bisognava considerare l'effetto della tiroide sui girini tenendo presente i noti risultati che lo studio della tiroide aveva già dati. Sopratutto nel 1914 ho chiaramente riferito i risultati, ottenuti su gli anfibî, a fenomeni dello stesso ordine ottenuti sperimentalmente, e anche in condizioni patologiche, sui mammiferi. Non ho parlato in modo vago; ma mi son richiamato a risultati concreti. Ho tenuto presente che nel progredire dell'età delle larve, ossia invecchiando, la percentuale in acqua diminuisce; e ho ricordato comparativamente già noti effetti della tiroide (perdita d'acqua, influenza sui fenomeni d'ossidazione ecc.). Ho infine fatto notare implicitamente che se si avevano effetti che parevano differenti, ciò era perchè noi sperimentavamo con organismi che avevano un proprio ciclo di sviluppo; sperimentalmente mettevamo le larve nelle condizioni biologiche della metamorfosi (perdita d'acqua, ad es.): le avevamo cioè invecchiate, e quindi subentrava la fase propria del ciclo di quei dati organismi, sui quali avevamo sperimentato.

Fin dal 1913 ho poi riferito un reperto molto importante: il poco sviluppo dei corpi grassi delle larve di Rane, nutrite con eccesso di tiroide. Questo reperto, in confronto con i controlli, sta ad indicarci il maggior consumo che induce la tiroide: in conseguenza risulteranno più attivi fenomeni di ossidazione: come prodotto di combustione finale si dovrà ottenere acqua e anidride carbonica: è probabile che sia questo il meccanismo della perdita d'acqua nei tessuti.

Io ho pensato dunque che la tiroide produca sul ricambio generale effetti tali che in condizioni normali coincidono con la fase di metamorfosi:

(1) Cotronei G., *Bios* vol. 2°, fasc. 1°, Estratto pubblicato nel 1913 e Rendiconti R. Acc. Lincei, vol. 23, 1914.

e per esempio concreto ho pensato alla perdita d'acqua, che si riscontra nell'invecchiamento delle larve.

Evidentemente a qualche cosa di simile pensa ora, dopo circa due anni, il Lenhart, per quanto non abbia riferito nessuna considerazione veramente nuova; è inutile quindi che io insista in una vana questione di priorità che sarebbe superflua.

Il Lenhart mostra di combattere il concetto del Gudernatsch che la tiroide agisca attivando i fenomeni di differenziazione. A tal proposito io ricordo che E. A. Schäfer (1912), alimentando ratti, in via di sviluppo, con pane e latte insieme con poca quantità di organi a secrezione interna, trovò un'azione lievemente acceleratrice per quelli nutriti con un po' di tiroide. I risultati sono dunque della stessa natura di quelli ottenuti negli anfibî; e io sono propenso a pensare che se si fosse sperimentato con una quantità di tiroide maggiore i risultati sarebbero stati ancora più evidenti.

Questa considerazione comparativa non è superflua; essa serve a convalidare il concetto che si tratti di fenomeni di natura identica tanto sui mammiferi quanto sugli anfibî, perchè si tratta di fenomeni riguardanti il metabolismo organico.

Io penso che la tiroide acceleri la vita larvale, perchè accelera il metabolismo organico; ma questi fenomeni a loro volta accelerano le differenziazioni.

In linea generale, la differenziazione non si verifica forse col progredire dell'età di un determinato tessuto, di un organo, di un embrione?

Ora, se la tiroide, stimolando il metabolismo organico, induce un dato tessuto a un consumo più vivo e con fenomeni di ossidazione più intensi, non è certamente errato il ritenere che essa faccia vivere, per così dire, più rapidamente queste determinate cellule e le faccia quindi invecchiare più rapidamente; e se nel divenire di un determinato gruppo cellulare è implicita la condizione di una ulteriore differenziazione, è intuitivo che l'azione della tiroide debba accelerare tale processo.

Questi concetti conducono (in relazione a quanto ho espresso nel 1914) a considerare la fase di metamorfosi come una fase di senescenza di un determinato periodo di un ciclo biologico.

Questa conclusione mi risulta avvalorata da tutti i moderni studî sperimentali. In effetto noi sappiamo che, col progredire dell'età, la percentuale di acqua di un organismo diminuisce: i tessuti giovani, al momento di massima intensità vitale, sono più ricchi in acqua; anche nel feto umano si attraversa un periodo nel quale si ha una quantità di acqua enormemente superiore a quella presente in qualunque altro momento della vita. Nei vecchi la percentuale in acqua è molto minore: accelerando la vita, vivendo cioè più intensamente, è chiaro che l'organismo si troverà nelle condizioni dell'impoverimento in acqua (è appunto il caso della metamorfosi degli

Anuri). La larva a un dato momento è vecchia per le proprie condizioni biologiche (relazione tra l'ambiente interno e l'ambiente esterno): ed allora con la metamorfosi inizia una nuova vita, con rinnovate condizioni morfologiche e biologiche.

***

A questo concetto della senescenza larvale si collegano intimamente le osservazioni fatte sull'azione della temperatura.

Van't Hoff ha con l'esperimento dimostrato che a parità delle altre condizioni la velocità delle reazioni chimiche aumenta in modo determinato (del doppio o del triplo) per ogni dieci gradi di temperatura.

La formula di Van't Hoff è la seguente:

$$Q_{10} = 10 \frac{10 (\log. K_1 - \log. K_2)}{t_1 - t_2},$$

in cui Q_{10} indica il coefficiente della temperatura, e K_1 e K_2 indicano le velocità della reazione chimica alle due temperature t_1 e t_2.

Si noti però che tale legge si verifica soltanto per un certo intervallo di temperatura, che per alcune reazioni chimiche si estende sino a 300°.

La legge di Van't Hoff è stata trasportata nel campo biologico; e in relazione alle mie ricerche mi interessa di ricordare che il Galeotti e la sua scuola hanno dimostrato studiando l'influenza della temperatura sul ricambio, che per ogni aumento di temperatura di dieci gradi la energia di consumo si raddoppia: è una brillante verifica sperimentale nel campo biologico della legge di Van't Hoff.

Il Boeri [1] ha inoltre riferito a questa legge il comportamento delle funzioni organiche nell'ipertermia, considerata negli animali artificialmente riscaldati; ed aggiunge: « Forse la precocità dei paesi caldi, il raccorciamento della stessa vita, obbediscono all'aumento della velocità delle reazioni chimiche disciplinato dall'equazione di Van't Hoff ».

Quanto precede entra nello stesso ordine di considerazioni dianzi esposte. Voglio ora deliberatamente prescindere dal discutere se la legge di Van't Hoff si verifichi matematicamente e sempre nei fenomeni organici: è probabile che in moltissimi casi la verifica, per condizioni sperimentali troppo complicate, debba sfuggire al controllo. Mi basta una considerazione che qui non cade dubbia; l'aumento di temperatura fino a determinati limiti si manifesta (qualunque sia la sua legge matematica) con un aumento di consumo.

Tenendo anche presenti i concetti del Rubner sulla quantità di energia che si consuma per dati periodi organici, noi vediamo chiaramente (quasi direi con intuitiva evidenza) come l'azione della tiroide e quella di un aumento

[1] Boeri G., Relazione su « La febbre dal punto di vista clinico » al 22° Congresso di Medicina interna (1912), Roma 1913.

di temperatura siano concomitanti: la tiroide, producendo un maggiore consumo di energia, produce un rapido invecchiamento della larva, ossia accelera i fenomeni di differenziazione e conduce dunque più presto alla fine del periodo larvale, facendo vivere la larva con maggiore intensità: *la metamorfosi si può considerare un termine fisso da raggiungere dopo un determinato consumo delle energie cellulari.*

Le temperature più alte (compatibili con la vita delle larve) manifestano a loro volta un'azione acceleratrice della fase di metamorfosi e dello sviluppo in generale, come ogni cultore di biologia sa; ma è noto che l'aumento di temperatura produce un aumento di consumo (Galeotti), onde io ne arguisco che è per l'aumentato consumo che si determina l'accelerazione della fase di metamorfosi.

Nella vita di un organismo il tempo non rappresenta la vecchiaia: la vecchiaia è in relazione con il consumo. Una macchina qualunque, che abbia lavorato meno intensamente, presumibilmente durerà più a lungo: quasi diremmo, ha una vita più lunga.

La tiroide agisce nella vita larvale degli Anuri in maniera che per l'aumentato metabolismo ricorda l'azione di un aumento di temperatura: è naturale che, sommando l'azione della tiroide e quella di un aumento di temperatura, gli effetti biologici vengano cumulati, ed è anche naturale che le temperature più basse, diminuendo il consumo e l'attività organica, ostacolino l'azione della tiroide.

Anche i fenomeni della disarmonia, da me descritti in precedenti ricerche, rientrano nello stesso ordine di idee. È lecito supporre che la condizione armonica dello sviluppo è una condizione di equilibrio ormonico; e che questo concetto non sia azzardato, io sono autorizzato a ritenerlo dai risultati dei miei esperimenti. In effetto, nutrendo con tiroide le larve di rana, io ho somministrato un eccesso di ormone (o ormoni) tiroideo: ho quindi evidentemente squilibrato l'armonia umorale. E questo squilibrio è tanto maggiore, quanto maggiore è la quantità di tiroide ingerita; e per gli effetti morfologici ancora tanto maggiore quanto più giovane è la larva in esperimento. Tale disarmonia si può spiegare col maggior consumo prodotto dalla tiroide: la tiroide somministrata alla larva, entrata in circolo in quantità non corrispondente alla condizione del suo sviluppo, agisce su tutti gli apparati organici e quindi stimola le energie di consumo di tutte le cellule; tutte entrano in attività maggiore, anche quelle che per l'armonia umorale e morfologica dovrebbero aspettare un maggiore sviluppo di altri organi. Ecco le ragioni per cui la fase di metamorfosi si manifesta disarmonica: ragioni di tempo e di eccesso di una secrezione interna.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

CANTELLI F. *Sulla legge dei grandi numeri*. Pres. dal Corrisp. CASTELNUOVO.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle inviate dai Corrispondenti BERLESE, GUARESCHI e SILVESTRI, e dal Socio straniero PICKERING; e fa particolare menzione del vol. I dell'opera del Corrisp. ENRIQUES e del prof. CHISINI, intitolata: *Teoria geometrica delle equazioni*.

CORRISPONDENZA

Il PRESIDENTE presenta un piego suggellato inviato dall'ing. V. MARAGHINI perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 gennaio 1916.

AGAMENNONE G. — Sul recente libro del cap. G. Costanzi « Bradisismi e terremoti ». (Estr. dal « Boll. della Società sismologica italiana », vol. XXVIII). Modena, 1914. 8°.

BÉGUINOT A. — Eterocarpia e polimorfismo nella « Calendula arvensis L. » (Estr. dagli « Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti », t. 74). Venezia, 1915. 8°.

BÉGUINOT A. — Fotomorfosi nelle plantule di « Opuntia vulgaris » Mill. (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXII). Firenze, 1915. 8°.

BÉGUINOT A. — La flora alveale del Reno Bolognese. (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXII). Firenze, 1915. 8°.

BÉGUINOT A. — Le teorie dell'evoluzione e la genetica delle specie: uno sguardo storico-critico. (Estr. dall' « Ateneo Veneto », ann. XXXVIII, vol. II). Venezia, 1915. 8°.

BÉGUINOT A. — Ricerche culturali sulle variazioni delle piante. IV. Di un nuovo ibrido nelle *Lychnis* del gruppo *Melandrium*, e considerazioni sulla genetica delle stesse. (Estr. dagli « Atti dell'Acc. veneto-trentino-istriana », vol. VIII). Padova, 1915. 8°.

BERLESE A. — Sul polimorfismo degli insetti. (Estr. dal « Redia », vol. XI). Firenze, 1915. 8°.

CABREIRA A. — Calendrier perpétuel dans les systèmes Julien (Ere chretienne) et Grègorien. (Extr. des « Trabalhos da Acad. de sc. de Portugal », 1ª ser., tomo II). Coïmbre, 1915. 8°.

CABREIRA A. — Sobre o quadrado e o cubo dos polinómios. (Separata dos « Trabalhos da Acad. de sciencias de Portugal », 1ª ser., tomo II). Coimbra, 1915. 8°.

CLAYPOLE J. — Human streptotrichosis and its differentiation from tubercolosis. (Reprinted from the « Archives of internal Medicine », 1914). Chicago, 1914. 8°.

DE' LUNA (marchese) G. — Nevrosi da trauma. (Estr. dalla « Rivista medica », an. XXIII). Milano, 1915. 8°.

ENRIQUES F. — Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, vol. I. Bologna, 1915. 8°.

GAY F. — An experimental study of methods of prophylactic immunization against typhoid fever: studies in typhoid immunization V. (Reprint. from the « Archives of internal Medicine », vol. XIV). Chicago, 1914. 8°.

GAY F. — New uses of specific skin tests in certain of the infectious diseases. (Extr. from the « Amer. Journal of the medical sciences », 1915). Berckeley, 1915. 8°.

GAY F. — Specific hyperleukocytosis studies in typhoid immunization. IV. (Reprinted from the « Archives of internal medicine », 1914). Chicago, 1914. 8°.

GAY F. — VI: Typhusimmunisierung. (Sonderdruck aus « Ergebnisse der Immunitatsforschung experimentellen Therapie, Bakteriologie und Hygiene; Bd I). Berlin, 1914. 8°.

GUARESCHI F. — Storia della chimica. XI. Jöns Jacob Berzelius e la sua opera scientifica. Brevi cenni sulla chimica nella prima metà del secolo XIX. (Estr. dal « Supplemento annuale all'Enciclopedia di chimica », vol. 31°). Torino, 1915. 8°.

MARCARELLI B. — Studio geo-agronomico della tenuta del R. Istituto superiore agrario sperimentale in Perugia. (Estr. da « Le stazioni agrarie italiane », vol. XLXIII). Modena, 1915. 8°.

Mascart J. — La détermination des longitudes par la telegraphie sans fil, et la précision dans la détermination de l'heure. Lyon, 1913. 8°.

Mirinny L. — Pantosynthèse: fonction pandynamique. Étude primordiale abrégée. Paris, 1915. 8°.

Paoli G. — Contributo alla conoscenza delle cocciniglie della Sardegna. (Estr. dal « Redia », vol. XI). Firenze, 1915. 8°.

Pickering E. C. — The astronomical Observatory. (Reprint. from the « Harvard Alumni Bulletin, 1915). s. l., 1915. 8°.

Savastano L. — L'arboricoltore meridionale nell'annata del 1916. (R. Staz. sperim. di agrumicoltura, Acireale. Bollett. n. 20). Acireale, 1915. f. v.

Savastano L. — Le invasioni di bruchi nei nocciuoleti del Messinese. (R. Stagione sperimentale di agrumicoltura, Acireale. Bollett. n. 19). s. l. 1915. 8°.

Silvestri F. — A proposito di predatori e di *Prospaltella* nella lotta contro la *Diaspis*. (Estr. dal « Boll. di informazioni seriche », an. II). Portici, 1915. f. v.

Silvestri F. — Struttura dell'ovo e prime fasi di sviluppo di alcuni Imenotteri parassiti. (Estr. dal « Boll. del laboratorio di zoologia generale e agraria », vol. X). Portici, 1915. 8°.